32T MATH

2022

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a–j) carries 1 mark each	1×10 = 10
Q. Nos. 2–13 carry 4 marks each	4×12 = 48
Q. Nos. 14–20 carry 6 marks each	6×7 = 42
	Total = 100

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Give an example of a column matrix which is also a row matrix.

এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো শাৰী মৌলকক্ষও হয়।

(b) "Diagonal elements of a skew-symmetric matrix are always zero" — Why?

"বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ বিকর্ণ মৌলবোৰ সদায় শূন্য" — কিয়?

(c) Let $f(x)=[x]$, where $[x]$ is a greatest integer function and $g(x)=x$. Find the value of $(f \circ g)(-\frac{1}{3})$.

ধৰা হ'ল $f(x)=[x]$, য'ত $[x]$ হ'ল গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলন আৰু $g(x)=x$. $(f \circ g)(-\frac{1}{3})$-ৰ মান উলিওৱা।

(d) Differentiate $sin x$ with respect to e^x.

e^x-ৰ সাপেক্ষে $sin x$-ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(e) Write down the value of $\int_{-2}^{2} |x| \, dx$.

$\int_{-2}^{2} |x| \, dx$-ৰ মান লিখা।

(f) Find the order of the differential equation

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^5 + sin(y'') = 0.$$

$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^5 + sin(y'') = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Find the principal value of $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - ৰ মুখ্যমান উলিওৱা।

(h) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা ঃ

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

(i) What is the direction cosine of X-axis ?

X- অক্ষৰ দিশাংক কিমান ?

(j) Let A and B be any two given sets. If $f : A \to B$ is a onto function, then find the range of f.

ধৰা হ'ল A আৰু B যিকোনো দুটা সংহতি। যদি $f : A \to B$ এটা আচ্ছাদক ফলন হয়, তেন্তে f-ৰ পৰিসৰ উলিওৱা।

2. Define an equivalence relation. Check whether the following relation R defined on the set of integers $\mathbb{Z}$ is an equivalence relation or not, where $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ is an integer}\}$. 1+3=4

সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ সংজ্ঞা দিয়া। $\mathbb{Z}$-ত সংজ্ঞাবদ্ধ তলৰ সম্বন্ধ R টো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা, য'ত $R = \{ (a, b) \mid a - b$ এটা অখণ্ড সংখ্যা $\}$।

OR / অথবা

Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = 2x - 3$ is invertible. Also find the inverse of f. 4

দেখুওৱা যে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-ত সংজ্ঞাবদ্ধ $f(x) = 2x - 3$ ফলনটো প্ৰতিলোমনীয়। f-ৰ প্ৰতিলোমও উলিওৱা।

3. Show that 4

দেখুওৱা যে

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$$

OR / অথবা

Solve the following equation : 4

তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$

4. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the value λ and μ such that $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, where 0 is zero matrix of order 2. 4

যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ আৰু $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তেন্তে λ আৰু μ -ৰ মান উলিওৱা যাতে $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, য'ত 0 হৈছে 2 ঘাতৰ শূন্য মৌলকক্ষ।

OR / অথবা

Determine the value of a for which the system is consistent. 4

a -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে প্ৰণালীটো সুসংগত হয়।

$$x + y + z = 1$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$ax + ay + 2az = 4$$

5. Find the value of k so that the following function

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 100x}{99}, & \text{if } x\neq 0\\ k, & \text{if } x=0\end{cases}$$

is continuous at $x=0$. 4

যদি $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 100x}{99}, & \text{যদি } x\neq 0\\ k, & \text{যদি } x=0\end{cases}$

ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Find $\dfrac{dy}{dx}$ if — 2+2=4

উলিওৱা $\dfrac{dy}{dx}$ যদিহে —

(i) $\sin^2 x+\cos^2 y=1$

(ii) $y = e^{\cos x}$

7. Prove that the greatest integer function defined by

$f(x)=[x], 0<x<2$ is not differentiable at $x=1$. 4

প্ৰমাণ কৰা যে $f(x)=[x], 0<x<2$-ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলনটো $x=1$ বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

OR / অথবা

If (যদি) $e^{y}(x+1)=1$, show that (দেখুওৱা যে) 4

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

8. Evaluate : 2+2=4

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a) $\int\left(x^{3/2}+2e^{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

(b) $\int sin^3 x\,cos^2 x\,dx$

OR / অথবা

Evaluate : 4

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$$

9. Find the equations of the tangent and normal to the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ at $(1,\ 1)$. 2+2=4

$x^{2/3}+y^{2/3}=2$ বক্ৰৰ $(1,\ 1)$ বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the local maxima and local minima, if any, of the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$. 2+2=4

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ ফলনটোৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা, যদি আছে।

10. A particle moves along the curve $6y = x^3 + 2$. Find the point(s) on the curve at which the y-coordinate is changing 8 times as fast as the x-coordinate. 4

এটা কণিকা $6y = x^3 + 2$ বক্ৰৰে চলাচল কৰে। বক্ৰটোৰ সেই বিন্দু (বোৰ) উলিওৱা য'ত x-স্থানাংক তকৈ 8 গুণ বেছি বেগত y-স্থানাংক পৰিৱৰ্তিত হয়।

OR / অথবা

Show that the function $f(x) = \cos 3x$ is neither strictly increasing nor decreasing on $(0, \pi/2)$. 4

দেখুওৱা যে $f(x) = \cos 3x$ ফলনটো $(0, \pi/2)$-ত সতত বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান এটাও নহয়।

11. Evaluate $\int_0^5 (x+1)\,dx$ as the limit of a sum. 4

যোগফলৰ চৰম মান হিচাপে $\int_0^5 (x+1)\,dx$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate : 4

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

12. Show that the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ is equally inclined to the axes OX, OY and OZ. 4

দেখুওৱা যে $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰটো OX, OY আৰু OZ অক্ষৰ লগত সমভাৱে হেলনীয়া হয়।

OR / অথবা

State the triangle inequality for any two vectors and prove it. 1+3=4

যিকোনো দুটা ভেক্টৰৰ বাবে ত্ৰিভুজ অসমিকাটো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

13. Probability of solving a specific problem independently by A and B are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that — 2+2=4

(i) the problem is solved

(ii) exactly one of them solves the problem.

A আৰু B য়ে এটা বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্ৰভাৱে সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা ক্ৰমে $\frac{1}{2}$ আৰু $\frac{1}{3}$। যদি সমস্যাটো সমাধানৰ বাবে উভয়ে স্বতন্ত্ৰভাৱে চেষ্টা কৰে, তেন্তে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে —

(i) সমস্যাটো সমাধান হয়

(ii) তেওঁলোকৰ ঠিক এজনে সমস্যাটোৰ সমাধান আগবঢ়ায়।

OR / অথবা

Let X denote the number of hours Rita studies during a randomly selected school day. The probability that X can take the values x, has the following form :

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.1, & \text{if} \quad x=0 \\ kx, & \text{if} \quad x=1 \text{ or } 2 \\ k(5-x), & \text{if} \quad x=3 \text{ or } 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where k is an unknown constant.

(a) Find the value of k.

(b) What is the probability that Rita studies at least two hours, exactly two hours and at most two hours ? 1+1+1+1=4

যাদৃচ্ছিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা স্কুলীয়া দিনত কোনোবা এদিন ৰীতাৰ অধ্যয়ন কৰা মুঠ ঘণ্টাৰ সংখ্যাটো X ৰে বুজোৱা হ'ল। X-ৰ মান x হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক নিম্নোক্ত ৰূপত প্ৰকাশ কৰা হৈছে ঃ

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.1, & \text{যদি} \quad x=0 \\ kx, & \text{যদি} \quad x=1 \text{ বা } 2 \\ k(5-x), & \text{যদি} \quad x=3 \text{ বা } 4 \\ 0, & \text{অন্যথা} \end{cases}$$

য'ত k এটা অজ্ঞাত ধ্ৰুৱক।

(a) k-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) ৰীতাই কমপক্ষে দুই ঘণ্টা, সঠিক দুই ঘণ্টা আৰু সৰ্বোচ্চ দুই ঘণ্টা অধ্যয়ন কৰাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ কিমান ?

14. Find the minors and cofactors of the elements of the determinant 3+3=6

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$ নিৰ্ণায়কটোৰ মৌলবোৰৰ অনুৰাশি আৰু সহৰাশি উলিওৱা।

OR / অথবা

Find A^{-1} by using elementary transformation, where — 6

মৌলিক ৰূপান্তৰ প্ৰক্ৰিয়া প্ৰয়োগ কৰি A^{-1} উলিওৱা য'ত —

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Define homogeneous function of degree n. Solve the differential equation 1+5=6

$$\left(x^2+xy\right)dy=\left(x^2+y^2\right)dx$$

n মাত্ৰাৰ সমমাত্ৰিক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

$\left(x^2+xy\right)dy=\left(x^2+y^2\right)dx$ অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা।

OR / *অথবা*

(i) Solve the differential equation : 3

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা ঃ

$$x\frac{dy}{dx}+(2x+1)y=xe^{-2x}$$

(ii) Form the differential equation of the family of circles touching the X-axis at origin. 3

মূলবিন্দুত X-অক্ষক স্পৰ্শ কৰা বৃত্তৰ পৰিয়াল এটাৰ অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা।

16. Integrate :

অনুকলন কৰা ঃ

(a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

(b) $\int x\sin^{-1}x\,dx$ 2+4=6

OR / অথবা

(a) $\int\left(\frac{2\cos x-3\sin x}{6\cos x+4\sin x}\right)dx$

(b) $\int\frac{x^3+x+1}{x^2-1}\,dx$ 2+4=6

17. For any three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ prove that

$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\cdot$ 6

যিকোনো তিনিটা ভেক্টৰ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ ।

OR / অথবা

Three vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ satisfy the condition $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Evaluate the quantity

$\mu=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ if $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$ and $|\vec{c}|=2$. 6

$\vec{a}, \vec{b}$ আৰু $\vec{c}$ ভেক্টৰ তিনিটাই $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ চৰ্ত সিদ্ধ কৰে।

$\mu=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদিহে $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$ আৰু $|\vec{c}|=2$ হয়।

18. Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda\left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$ and

$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right) + \mu\left(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right)$. 6

$\vec{r} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda\left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$ আৰু

$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right) + \mu\left(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right)$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নূন্যতম দূৰত্ব উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the equation of the plane passing through the point $(-1, 3, 2)$ and perpendicular to each of the planes $x + 2y + 3z = 5$ and $3x + 3y + z = 0$. 6

$(-1, 3, 2)$ বিন্দুৰে যোৱা আৰু $x + 2y + 3z = 5$ আৰু $3x + 3y + z = 0$ সমতল দুখনৰ প্ৰত্যেকৰে লম্বভাৱে থকা সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

19. Minimize $Z = 3x + 5y$

subject to $x + 3y \geq 3$

$x + y \geq 2$

$x, y \geq 0$ 6

$x + 3y \geq 3$

$x + y \geq 2$

$x, y \geq 0$ সীমাবদ্ধতা সাপেক্ষে $Z = 3x + 5y$ -ৰ সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।

OR / অথবা

Minimise and Maximise $Z = 5x + 10y$

subject to

$$x + 2y \le 120$$

$$x + y \ge 60$$

$$x - 2y \ge 0$$

$$x, y \ge 0$$ 6

$x + 2y \le 120$

$x + y \ge 60$

$x - 2y \ge 0$

$x, y \ge 0$ সাপেক্ষে $Z = 5x + 10y$ -ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।

20. Of the students in a college, it is known that 60% reside in hostel and 40% are day scholars (not residing in hostel). Previous year results report that 30% of all students who reside in hostel attain A grade and 20% of day scholars attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the college and he has an A grade, what is the probability that the student is a hostlier ? 6

এখন মহাবিদ্যালয়ৰ 60% য়ে ছাত্ৰাবাসত আৰু 40% য়ে ছাত্ৰাবাসত নাথাকে বুলি জানিব পৰা গ'ল। আগৰ বছৰৰ ফলাফল অনুসৰি বছেৰেকীয়া পৰীক্ষাত ছাত্ৰাবাসত থকা সকলো ছাত্ৰৰ 30% য়ে আৰু ছাত্ৰাবাসত নথকা ছাত্ৰসকলৰ 20% য়ে A গ্ৰেড পাইছিল। বছৰৰ অন্তত মহাবিদ্যালয়খনৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এজন ছাত্ৰই A গ্ৰেড পালে। ছাত্ৰজন ছাত্ৰাবাসৰ আবাসী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

OR / অথবা

Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin. 6

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা তিনিবাৰ টছ কৰি পোৱা মুণ্ড সংখ্যাৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

—— × ——