Total number of printed pages–11

3 (Sem–3) MAT

2021

(Held in 2022)

MATHEMATICS

(General)

(Calculus : Methods and Applications)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Let $f(x) = e^{2x}$. Find $f^n(0)$.

$f(x) = e^{2x}$ হ'লে $f^n(0)$ৰ মান লিখা।

(b) State Leibnitz's theorem.

লিবনিজৰ উপপাদ্য লিখা।

Contd.

(c) Verify Rolle's Theorem for the function

$f(x) = x^2, \quad x \in [2, 3]$

$f(x) = x^2, \quad x \in [2, 3]$ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত ৰোলৰ উপপাদ্য প্ৰযোজ্য হয়নে? পৰীক্ষা কৰা।

(d) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

(e) What is the value of $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$?

$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$-ৰ মান কি হ'ব, লিখা।

(f) Using Maclaurin's series, write down the expansion of e^x.

মেক্লʼৰিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি e^x ৰ বিস্তৃতি লিখা।

(g) If $f(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}$, then find $f_y(0, 0)$.

যদি $f(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}$, তেনেহʼলে $f_y(0, 0)$-ৰ মান উলিওৱা।

(h) State Cauchy's Mean Value Theorem.

কোচিৰ মধ্য মান উপপাদ্যটো লিখা।

(i) What are the asymptotes parallel to the x-axis of the curve

$\left(y^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=0$?

$\left(y^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=0$ বক্ৰলৈ x-অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাবোৰ কি কি?

(j) State the degree and the order of the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2$$

তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ ঘাত আৰু ক্ৰম লিখা ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2$$

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the reduction formula for

$\int sin^n x\,dx$.

$\int sin^n x\,dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰ উলিওৱা।

(b) Find the nth derivative of $\frac{1}{ax+b}$.

$\frac{1}{ax+b}$ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

(c) Solve (সমাধান কৰা) : $\left(D^2+6D+5\right)y=0$

(d) Show that the following function (দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো) —

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

is continuous at $x=0$ ($x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন)

(e) Find the maximum and minimum values of :

গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Show that the differential equation

$$\left(2x^2+4y\right)dx+\left(4x+y-1\right)dy=0$$

is exact and hence solve it.

$$\left(2x^2+4y\right)dx+\left(4x+y-1\right)dy=0$$

অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ বুলি প্ৰমাণ কৰি সমাধান কৰা।

(b) A population grows at the rate of 5% in a year. How long does it take to become double ?

জনসংখ্যা বছৰি 5% হাৰত বৃদ্ধি হয়। সেই জনসংখ্যা কিমান বছৰত দুগুণ হব?

(c) Prove that for the cardioid $r=a\left(1+\cos\theta\right)$, ρ^2/r is constant, where ρ is the radius of curvature at any point on the curve.

প্ৰমাণ কৰা যে $r=a\left(1+\cos\theta\right)$ কাৰ্ডিয়ডৰ যিকোনো বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্দ্ধ ρ হ'লে ρ^2/r ৰাশিটো এটা ধ্ৰুৱক হব।

(d) If $y = log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, prove by using Leibnitz's Theorem that :

$$\left(1+x^2\right)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

$y = log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ লৈ লিবনিজ-ৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(1+x^2\right)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

(e) If (যদি) $u(x, y) = x^2 tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 tan^{-1}\frac{x}{y}$ (হয়), $xy \neq 0$ then show that (তেনেহ'লে দেখুওৱা যে),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(f) If (যদি) $0 < a < b$ (হয়) prove that (তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{b-a}{1+b^2} < tan^{-1}b - tan^{-1}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

4. Answer ***any four*** questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve ***any two*** : 5×2=10

যিকোনো দুটাৰ সমাধান উলিওৱা ঃ

(i) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

Given that (দিয়া আছে যে) when $t = 0$,

then (তেতিয়া) $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 2$

(ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4$

(iii) $\left(D^2 + 4D + 3\right)y = e^{-3x}$

(iv) $\left(D^2 - 4\right)y = sin\,2x$

(b) 5+5=10

(i) State and prove Euler's Theorem on homogeneous functions of two variables.

দুটা চলকৰ সমঘাত ফলনৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(ii) If (যদি) $z = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ (হয়),

then using Euler's theorem, prove that (তেনেহ'লে অয়লাৰৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে) —

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\tan z$$

(c) Evaluate ***any two*** : 5×2=10

যিকোনো দুটাৰ মান উলিওৱা ঃ

(i) $\lim_{x \to 0} (\cot x)^{\frac{1}{(\log x)}}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(iii) $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$

(d) 5+5=10

(i) Find the total length of the astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

এষ্ট্ৰইড $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য উলিওৱা।

(ii) If $f(x)=f(a+x)$, then prove that

$$\int_0^{na} f(x)dx = n.\int_0^a f(x)dx.$$

যদি $f(x)=f(a+x)$ হয়, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_0^{na} f(x)dx = n.\int_0^a f(x)dx$$

(e) (i) Calculate $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$. Also show that f is continuous at $(0,0)$; where— 2+2+4=8

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ ৰ মান উলিওৱা আৰু দেখুওৱা যে f, বিন্দু $(0,0)$-ত অবিচ্ছিন্ন যত—

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ii) Give the geometrical interpretation of Lagrange's Mean Value Theorem. 2

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাঙি ধৰা।

(f) 4+4+2=10

(i) Obtain a reduction formula for

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰ উলিওৱা।

(ii) Find (উলিওৱা) ঃ

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

(iii) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$$

(g) 5+5=10

(i) Find the area bounded by one arc of the cycloid $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ and the x-axis.

চাইক্লইড $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ ৰ এটা সম্পূৰ্ণ ধনুচাপ আৰু x-অক্ষই আগুৱা ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

(ii) Show that $e^{\int P dx}$ is an integrating factor of the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

দেখুওৱা যে ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ ৰ}$$

$e^{\int Pdx}$ এটা অনুকলক গুণক।

(h) Evaluate ***any two*** : 5×2=10

যিকোনো দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\int_0^{\pi} x \log \sin x \, dx$

(ii) $\int \frac{\cos x \, dx}{3\cos x + 4\sin x}$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$