# 1 (Sem–5/FYUGP) MAT 45 MN/(B)

## 2025

## MATHEMATICS

( Minor )

Paper : MAT0500504

**( Multivariate Calculus )**

( Set–B )

*Full Marks* : 60

*Time* : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

**1.** Answer any *eight* of the following : 1×8=8

(a) Find the domain of $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^4 + y^4}$.

(b) If $f(x, y) = x\sin(xy)$, then find $f_y$.

(c) Define gradient of $f(x, y)$.

(d) When is the function $f(x, y)$ said to have relative maximum at the point $(x_0, y_0)$ of its domain?

(e) What is the curl of a constant vector field?

(f) Define the directional derivative of the function $f(x, y)$ at $P(x_0, y_0)$ in the direction of $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$.

(g) Define a vector field.

(h) Find the curl $\vec{F}$, where $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

(i) Define a critical point of a function $f$ defined on an open set $D$.

(j) Determine the constant $a$ such that $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$, where $\vec{f} = x\hat{i} + y\hat{j} + (x + az)\hat{k}$.

**2.** Answer any *six* of the following : 2×6=12

(a) If $f(x, y) = e^y \cos x$, then find

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(b) Find the gradient of the function

$$f(x, y) = x^2 y + y^3$$



( Continued )



(c) Find the critical point of

$$f(x, y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

(d) Prove that $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \to 2}} (x^2 + 2y) = 5$.

(e) If $\vec{A} = xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 2x^2 y\hat{k}$, then find curl $\vec{A}$.

(f) Find the Jacobian $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, when $x = u + 2v$, $y = 3u - 4v$.

(g) Find the domain and range of the function $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

(h) If $x^2 z + yz^3 = x$, then find $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

(i) Define absolute maximum and absolute minimum of a function $f(x, y)$ at the point $(x_0, y_0)$ in the domain $D$.

(j) Find the directional derivative of $f(x, y) = \log(x^2 + 3y)$ at $(1, 1)$ in the direction of $\hat{i} + \hat{j}$.



( Turn Over )

3. Answer any *four* of the following : 5×4=20

(a) Show that

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

does not exist.

(b) Use the method of Lagrange's multiplier to

maximize $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

subject to $x + 2y = 6$.

(c) By direct calculation, show that

$$f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zyx}$$

for the function

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 y^3 z^4$$

(d) If $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, where $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, then find $\dfrac{dz}{d\theta}$.

(e) In what direction is the function defined by $f(x, y) = xe^{2y-x}$ increasing most rapidly at the point $P_0(2, 1)$ and what is the maximum rate of increase?





(f) Find the equations for the tangent plane and normal line to the cone $z^2 = x^2 + y^2$ at the point where $x = 3$, $y = 4$ and $z > 0$.

(g) Find all relative extrema and saddle points of the function

$$f(x, y) = x^2 - 6x + 2y^2 + 4y - 2$$

(h) Show that grad $\phi$ is a vector perpendicular to the surface $\phi(x, y, z) = c$, where $c$ is a constant.

4. Answer any *two* of the following questions : 10×2=20

(a) (i) If $u = f(x + 2y) + g(x - 2y)$, then show that

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ 5

(ii) Find the critical points of the function

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 5$$

Also find all relative extrema. 5

(b) Define second-order partial derivative test for the extremum of the function $f(x, y)$ at $(x_0, y_0)$. By using the second-order partial test to classify each point as a relative extremum or a saddle point for the function $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$. 10

(c) (i) Find the directional derivative of $\phi = x^2yz + 4xz^2$ at $(1, -2, -1)$ in the direction $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$. 5

(ii) Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at the point $(2, -1, 2)$. 5

(d) (i) Investigate the continuity of

$$f(x, y) = \begin{matrix} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad, & (x, y) = (0, 0) \end{matrix}$$

at $(0, 0)$. 5

(ii) Find $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, if $w = 4x + y^2 + z^3$, where $x = e^{rs^2}$, $y = \log \dfrac{r + s}{t}$, $z = rst^2$. 5



*( Continued )*



(e) Find the point on the intersection of the plane $x + 2y + z = 10$ and the paraboloid $z = x^2 + y^2$ that is closest to the origin. 10

★★★

## 1 (Sem–5/FYUGP) MAT 45 MN/(A)

## 2025

# MATHEMATICS

## ( Minor )

Paper : MAT0500504

**( Multivariate Calculus )**

( Set–A )

*Full Marks* : 60

*Time* : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

**1.** Choose the correct answer/Answer the following : 1×8=8

তলত দিয়াবোৰৰ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা/উত্তৰ দিয়া :

*(a)* The function $f(x, y) = x \cdot y$ is continuous at the point (0, 0). The statement

$f(x, y) = x \cdot y$ ফলনটো (0, 0) বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন। উক্তিটো

*(i)* is true / সঁচা

*(ii)* is false / মিছা

*(iii)* It depends on path / পথৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল

*(iv)* Undefined / অসংজ্ঞায়িত

(b) If $z = x^2 + y^2$ and $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, then $\frac{\partial z}{\partial r} =$

$z = x^2 + y^2$ আৰু $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হ'লে, তেন্তে $\frac{\partial z}{\partial r} =$

(i) $2r$
(ii) $2\theta$
(iii) $r^2$
(iv) 0

(c) Total derivative of $z = xy$ is

$z = xy$ৰ সম্পূৰ্ণ অন্তৰক হ'ল

(i) $xdy + ydx$
(ii) $dx + dy$
(iii) $xy\,dx$
(iv) $dx \cdot dy$

(d) If $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, then gradient of $f(x, y, z)$ is

যদি $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, তেন্তে $f(x, y, z)$ৰ গ্ৰেডিয়েন্ট হ'ল

(i) $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
(ii) $2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$
(iii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
(iv) 0

( Continued )





(e) Find the divergence of $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ৰ ডাইভাৰ্জেন্স নিৰ্ণয় কৰা।

(f) For $f(x, y) = x^2 + y^2$, the critical point is

$f(x, y) = x^2 + y^2$ ফলনটোৰ সংকট বিন্দু হ'ব

(i) (1, 1)
(ii) (0, 0)
(iii) (2, 2)
(iv) (−1, −1)

(g) If $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, where $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, then $\vec{\nabla} \times \vec{F} = ?$

যদি $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, য'ত $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, তেন্তে $\vec{\nabla} \times \vec{F} = ?$

(i) 0
(ii) 3
(iii) $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
(iv) None of the above
ওপৰৰ এটাও নহয়



( Turn Over )

*(h)* Write the necessary condition that $f(x, y)$ to have extreme value at point $(a, b)$.

$f(x, y)$ ফলনটোৰ $(a, b)$ বিন্দুত চৰম মান পোৱাৰ অত্যাৱশ্যকীয় চৰ্তটো লিখা।

**2.** Answer any *six* from the following questions : $2\times6=12$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

*(a)* If $f(x, y)=\int_x^y \frac{dt}{1+t^2}$, then find $f(x, y)$ at point $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

যদি $f(x, y)=\int_x^y \frac{dt}{1+t^2}$, তেন্তে $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ বিন্দুত $f(x, y)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

*(b)* If $f(x, y, z)=x^2ye^{2x}+(x+y-z)^2$, then find $f(1, -1, 0)$.

যদি $f(x, y, z)=x^2ye^{2x}+(x+y-z)^2$, তেন্তে $f(1, -1, 0)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

*(c)* If $f(x, y)=\sin^{-1}(xy)$, then find $f_x$ at the point $(1, 1)$.

যদি $f(x, y)=\sin^{-1}(xy)$, তেন্তে $f_x$ৰ মান $(1, 1)$ বিন্দুত নিৰ্ণয় কৰা।

( *Continued* )





*(d)* Find the local extreme values of $f(x, y)=xy$.

$f(x, y)=xy$ ফলনটোৰ স্থানীয় চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা।

*(e)* If $\vec{F}(x, y)=(x^2-y)\hat{i}+(xy-y^2)\hat{j}$, then find $\operatorname{div}\vec{F}$.

যদি $\vec{F}(x, y)=(x^2-y)\hat{i}+(xy-y^2)\hat{j}$, তেন্তে $\operatorname{div}\vec{F}$ নিৰ্ণয় কৰা।

*(f)* Show that

দেখুওৱা যে

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{V})=(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{V}+\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$$

*(g)* Find the domain of the following function :

তলৰ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$f(x, y)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

*(h)* Explain the meaning of 'level surface' with an example.

'সমতল পৃষ্ঠ' কি, উদাহৰণৰ সৈতে ব্যাখ্যা কৰা।



( *Turn Over* )

*(i)* If $z = x^2y + y$, then show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

যদি $z = x^2y + y$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

*(j)* Find the directional derivative of $f(x, y) = x^2 + y$ at the point $(1, 1)$ in the direction of $\hat{i} + \hat{j}$.

$\hat{i} + \hat{j}$ৰ দিশত $f(x, y) = x^2 + y$ ফলনটোৰ $(1, 1)$ বিন্দুত দিশাত্মক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

**3.** Answer any *four* from the following questions : 5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

*(a)* Examine whether the function

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y, & \text{if } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

is continuous at the point $(1, 2)$.

তলৰ ফলনটো $(1, 2)$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়নে পৰীক্ষা কৰা :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y, & \text{যদি } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & \text{যদি } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$





*(b)* Find $\text{div}\vec{F}$, given that $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, where $f(x, y, z) = x^2yz^3$.

যদি $f(x, y, z) = x^2yz^3$ আৰু $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, তেন্তে $\text{div}\vec{F}$ নিৰ্ণয় কৰা।

*(c)* If $w = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r$ and $\theta$ are polar coordinates), then prove that

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

যদি $w = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r$ আৰু $\theta$ পোলাৰ স্থানাংক), তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

*(d)* Find the directional derivative of $f(x, y) = 2x^2 - xy + 5$ at the point $(1, 1)$ in the direction of the unit vector $\vec{u} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{j})$.

$f(x, y) = 2x^2 - xy + 5$ ফলনটোৰ $(1, 1)$ বিন্দুত একক ভেক্টৰ $\vec{u} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{j})$ৰ দিশত দিশাত্মক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

*(e)* Find the maximum and minimum values of $x^2+y^2+6x+12$.

$x^2+y^2+6x+12$ ফলনটোৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

*(f)* Find the maximum and minimum values of the function $f(x, y)=3x+4y$ on the circle $x^2+y^2=1$.

$f(x, y)=3x+4y$ ফলনটোৰ $x^2+y^2=1$ বৃত্তৰ সাপেক্ষে সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

*(g)* If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and $r=|\vec{r}|$, then prove that

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)=4$$

যদি $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ আৰু $r=|\vec{r}|$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)=4$$

*(h)* Find the curl of

$$\vec{V}=(xyz)\hat{i}+(3x^2y)\hat{j}+(xz^2-y^2z)\hat{k}$$

at the point $(2, -1, 1)$.

$(2, -1, 1)$ বিন্দুত

$\vec{V}=(xyz)\hat{i}+(3x^2y)\hat{j}+(xz^2-y^2z)\hat{k}$ৰ

curl নিৰ্ণয় কৰা।





**4.** Answer any *two* from the following questions : 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

*(a)* *(i)* Use the method of Lagrange multiplier to maximize $f(x, y)=16-x^2-y^2$, subject to $x+2y=6$. 6

লাগ্ৰেঞ্জৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $f(x, y)=16-x^2-y^2$ৰ সৰ্বোচ্চ মান নিৰ্ণয় কৰা, য'ত $x+2y=6$.

*(ii)* If $f(x, y, z)=xyz+x^2y^3z^4$, then show that

$$f_{xyz}=f_{yzx}=f_{zxy}$$ 4

যদি $f(x, y, z)=xyz+x^2y^3z^4$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$f_{xyz}=f_{yzx}=f_{zxy}$$

*(b)* *(i)* Prove that the following function is not continuous at the point $(0, 0)$ : 5

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & \text{when } x\neq y\\ 0, & \text{when } x=y\end{cases}$$

প্ৰমাণ কৰা যে তলৰ ফলনটো (0, 0) বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন নহয় :

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & \text{য'ত } x \neq y \\ 0, & \text{য'ত } x=y\end{cases}$$

(ii) Prove that $y=f(x+at)+g(x-at)$ satisfies $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$, where $f$ and $g$ are assumed to be at least twice differentiable and $a$ is a constant. 5

যদি $f$ আৰু $g$ ফলন দুটা কমেও দ্বিতীয় ঘটেলৈ অৱকলনীয় আৰু $a$ এটা ধ্ৰুৱক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $y=f(x+at)+g(x-at)$য়ে $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ক সিদ্ধ কৰে।

(c) (i) If $u=f(r)$ and $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$ 6

যদি $u=f(r)$ আৰু $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$



( Continued )



(ii) Find the directional derivative by using gradient of $f(x, y)=x^2\sin 2y$ at the point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ in the direction of $\vec{V}=3\hat{i}-4\hat{j}$. 4

গ্ৰেডিয়েণ্ট ব্যৱহাৰ কৰি, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুত $f(x, y)=x^2\sin 2y$ ফলনটোৰ $\vec{V}=3\hat{i}-4\hat{j}$ৰ দিশত দিশাত্মক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) (i) Find local extreme value of the function

$$f(x, y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$$ 5

$$f(x, y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$$

ফলনটোৰ স্থানীয় চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the point upon the plane $ax+by+cz=P$ at which the function $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$ has a minimum value and find this minimum value. 5

$ax+by+cz=P$ সমতলৰ ওপৰত বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা যাতে $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$ ফলনটোৰ মান সৰ্বনিম্ন হয় আৰু এই সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।



( Turn Over )

(e) (i) Find the value of $n$ for which the vector $r^n \vec{r}$ is solenoidal, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $|\vec{r}| = r$. 4

$n$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি $r^n \vec{r}$ সোলেনয়েডাল ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ হয়, য'ত $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $|\vec{r}| = r$.

(ii) Prove that

$$\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\hat{i} + (3xz + 2xy)\hat{j} + (3xy - 2xz + 2z)\hat{k}$$

is both solenoidal and irrotational. 3+3=6

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\hat{i} + (3xz + 2xy)\hat{j} + (3xy - 2xz + 2z)\hat{k}$$

সোলেনয়েডাল আৰু ইৰোটেচনেল ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ হয়।

★★★

# 2025

## MATHEMATICS

( Minor )

Paper : MAT0500604

**( Numerical Analysis—I )**

( Set—A )

*Full Marks* : 45

*Time* : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Using the Gaussian elimination method, perform the first elimination step for the system

$$2x+3y=5$$
$$4x+y=6$$

What multiplier $m_{21}$ is used to eliminate $x$ from the second equation?

গাউচিয়ান নিবসন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ব্যৱস্থাটোৰ প্ৰথম বাদদিয়া পদক্ষেপটোৰ কাৰ্য সম্পাদন কৰা

$$2x+3y=5$$
$$4x+y=6$$

দ্বিতীয় সমীকৰণৰ পৰা $x$ৰ মান বাদদিবৰ বাবে ব্যৱহৃত গুণকৰ $m_{21}$ কি, লিখা।

(b) Solve the following system of equations using Gauss-Jordan method :

গাউচ-জৰদান পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত সমীকৰণ ব্যৱস্থাৰ সমাধান কৰা :

$$2x+y=5$$
$$x+3y=6$$

(c) Using Newton's divided difference formula, write the first two terms of the interpolation polynomial for the points (0, 1), (1, 3), (2, 7).

নিউটনৰ ভাগকৰা পাৰ্থক্য সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি (0, 1), (1, 3), (2, 7) বিন্দুবোৰৰ ইণ্টাৰপ'লেচন পলিনমিয়েলৰ প্ৰথম দুটা পদ লিখা।

(d) Use Gregory-Newton forward difference formula to find the value of $y$ at $x = 1\cdot5$ for the following table :

গ্ৰেগৰী-নিউটনৰ ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ তথ্যৰ পৰা $x = 1\cdot5$ত $y$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 2 | 3 |
| $y$ : | 2 | 3 | 5 |

( Continued )





(e) Find an approximate value of $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

চিম্পচনৰ $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ৰ প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

**2.** Answer any *five* of the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো পাঁচটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Solve the system using Gaussian elimination with row changes if necessary :

$$x+2y=5$$
$$3x+y=6$$

Write the augmented matrix after the first step.

প্ৰয়োজন অনুসৰি শাৰী পৰিৱৰ্তন কৰি গাউচিয়ান নিবসন ব্যৱহাৰ কৰি ব্যৱস্থাটো সমাধান কৰা :

$$x+2y=5$$
$$3x+y=6$$

প্ৰথম পদক্ষেপৰ পিছত অগমেণ্টেড মেট্ৰিক্সটো লিখা।

(b) For the system

$$2x+3y=7$$
$$4x+y=5$$

find the multiplier used to eliminate $x$ from the second equation.



( Turn Over )

ব্যৱস্থা

$$2x+3y=7$$
ৰ
$$4x+y=5$$

বাবে দ্বিতীয় সমীকৰণৰ পৰা $x$ বাদ দিবলৈ ব্যৱহৃত গুণকটো লিখা।

(c) Solve the system using Gauss-Jordan method :

$$x+y=4$$
$$x-y=2$$

Make the first lending number 1 and then show the matrix after making the first column below it 0.

গাউচ-জৰডান পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ব্যৱস্থাটো সমাধান কৰা :

$$x+y=4$$
$$x-y=2$$

প্ৰথম শাৰীটোত আগবঢ়া সংখ্যাটো 1 কৰা আৰু তাৰ পাছত প্ৰথম স্তম্ভৰ তলৰ সংখ্যাটো 0 কৰা।

(d) Using the Jacobi method, find the first values of $x$ and $y$ for the system

$$x+y=3$$
$$x-y=1$$

Start with $x=0$ and $y=0$.





জেকবী পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত ব্যৱস্থাটোৰ বাবে $x$ আৰু $y$ৰ প্ৰথম অনুমান উলিওৱা

$$x+y=3$$
$$x-y=1$$

য'ত প্ৰাৰম্ভিক মান $x=0$ আৰু $y=0$ বুলি ধৰা।

(e) Using Gauss-Seidel method, calculate the first updated values of $x$ and $y$ for $2x+y=5$ and $x+3y=9$, start with $x=0$ and $y=0$.

গাউচ-চাইডেল পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $2x+y=5$ আৰু $x+3y=9$ ব্যৱস্থাটোৰ প্ৰথম আপডেট হোৱা মান $x$ আৰু $y$ নিৰ্ণয় কৰা, য'ত প্ৰাৰম্ভিক মান হ'ল $x=0$ আৰু $y=0$.

(f) A function satisfies $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=5$. Using Lagrange interpolation, find the value of $f(1\cdot5)$.

এটা ফলনৰ মান $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=5$ হ'লে লেগ্ৰেঞ্জ ইন্টাৰপ'লেচন ব্যৱহাৰ কৰি $f(1\cdot5)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(g) The following data is given :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | : | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | : | 1 | 4 | 9 |

Find $f(1\cdot5)$ using the Newton forward interpolation formula.

দিয়া আছে

| $x$ | : | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | : | 1 | 4 | 9 |

নিউটন ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপ'লেচন ব্যৱহাৰ কৰি $f(1\cdot5)$ ৰ মান উলিওৱা।

*(h)* If $f(x)=x^2$, calculate the backward difference $\nabla f(2)$ using $x=0, 1, 2$.

যদি $f(x)=x^2$ হয়, তেন্তে $x=0, 1, 2$ লৈ বেকৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ $\nabla f(2)$ নিৰ্ণয় কৰা।

*(i)* Using the table

| $x$ | : | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | : | 5 | 9 | 15 |

estimate $f(2\cdot5)$ by Gregory-Newton forward difference interpolation.

দিয়া আছে

| $x$ | : | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | : | 5 | 9 | 15 |

গ্ৰেগৰী-নিউটন ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ ইণ্টাৰপ'লেচন ব্যৱহাৰ কৰি $f(2\cdot5)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

*(j)* Evaluate $\int_1^3 (2x+1)\,dx$ using the Trapezoidal rule with $h=1$.

ট্ৰেপিজয়ডাল নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি $h=1$ত $\int_1^3 (2x+1)\,dx$ ৰ মান উলিওৱা।





**3.** Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ লিখা :

*(a)* The table below shows values of a function :

তলৰ ফলনৰ মানৰ টেবুল দিয়া হৈছে :

| $x$ | : | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | : | 1 | 4 | 9 |

*(i)* Construct the Lagrange's interpolation polynomial.

লেগ্ৰেঞ্জ ইণ্টাৰপ'লেচন পলিনমিয়েল গঠন কৰা।

*(ii)* Use it to estimate $f(2\cdot5)$.

এই পলিনমিয়েল ব্যৱহাৰ কৰি $f(2\cdot5)$ নিৰ্ণয় কৰা।

*(b)* Given

দিয়া আছে

| $x$ | : | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | : | 1 | 8 | 27 | 64 |

*(i)* Form the Newton forward interpolation formula.

নিউটন ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপ'লেচন সূত্ৰটো গঠন কৰা।

*(ii)* Estimate $f(1\cdot5)$.

$f(1\cdot5)$ ৰ মান উলিওৱা।

*(c)* Given $f(x) = x^2$, $x = 0, 1, 2, 3, 4.$ Compute the first and second forward and backward difference at $x = 1$ and $x = 4$.

যদি $f(x) = x^2$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$ হয়, তেন্তে $x = 1$ আৰু $x = 4$ত প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় ফৰৱাৰ্ড আৰু বেকৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ গণনা কৰা।

*(d)* A small factory records the number of items produced by a machine every hour as shown below :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Hour* $(x)$ | : | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Items produced* $f(x)$ | : | 10 | 18 | 30 | 46 |

*(i)* Using the Gregory-Newton forward difference method, estimate how many items were produced at 1·5 hours.

*(ii)* Show all steps using the forward difference table.

এটা সৰু কাৰখানাই যন্ত্ৰটোৱে প্ৰতি ঘণ্টা কিমান বস্তু উৎপাদন কৰিছে সেইটো তলত দিয়া ধৰণে লিখি ৰাখিছে :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *ঘণ্টা* $(x)$ | : | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *উৎপাদিত বস্তু* $f(x)$ | : | 10 | 18 | 30 | 46 |





*(i)* গ্ৰেগৰী-নিউটন ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি 1·5 ঘণ্টাত কিমান উৎপাদন হৈছে অনুমান কৰা।

*(ii)* ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ টেবুল মতে ইয়াৰ প্ৰত্যেকটো ধাপ দেখুওৱা।

*(e)* A small fruit seller records price of mangos on different days of the week as follows :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Day* $(x)$ | : | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Price* (per kg) $f(x)$ | : | 20 | 22 | 19 | 25 |

*(i)* Construct piecewise linear polynomials between each consecutive day.

*(ii)* Using these polynomials, estimate the price per kg of mangos on day 2·5 and day 3·5

এটা সৰু ফল বিক্ৰেতাই সপ্তাহৰ বিভিন্ন দিনত আমৰ প্ৰতিটো কে. জি. তলত দিয়া ধৰণে লিখি ৰাখিছে :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *দিন* $(x)$ | : | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *মূল্য* (প্ৰতি কে. জি.) $f(x)$ | : | 20 | 22 | 19 | 25 |

*(i)* প্ৰতিটো পৰৱৰ্তী দিনৰ বাবে অংশভাগীয় ৰৈখিক পলিনমিয়েল লিখা।

*(ii)* এই পলিনমিয়েল ব্যৱহাৰ কৰি 2·5 দিনত আৰু 3·5 দিনত আমৰ প্ৰতি কে. জি. মূল্য লিখা।

*(f)* Apply the Trapezoidal rule and Simpson's $\frac{1}{3}$ rule to approximate

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

using two sub-intervals $(n=2)$.

Trapezoidal rule আৰু Simpson's $\frac{1}{3}$ rule ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া সমাকলনৰ মান উলিওৱা :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

য'ত দুটা উপঅন্তৰাল $(n=2)$ ব্যৱহাৰ কৰা ।

*(g)* Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = x+y, \quad y(0)=1$$

using Euler's method with step size $h=0 \cdot 1$ to find the value of $y(0 \cdot 1)$ and $y(0 \cdot 2)$.

Euler's method (step size $h=0 \cdot 1$) ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণ সমাধান কৰা আৰু $y(0 \cdot 1)$ আৰু $y(0 \cdot 2)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{dy}{dx} = x+y, \quad y(0)=1$$

*(h)* The integral $I=\int_0^2 e^{-x} dx$ is approximated using the trapezoidal rule with step sizes $h=1$ and $h=0 \cdot 5$. Use Richardson extrapolation to improve the accuracy of the result.





সমাকলন $I=\int_0^2 e^{-x} dx$ ত Trapezoidal rule ব্যৱহাৰ কৰি $h=1$ আৰু $h=0 \cdot 5$ ত মান গণনা কৰা । এই দুয়োটা মান ব্যৱহাৰ কৰি Richardson extrapolation ৰ সহায়ত অধিক শুদ্ধকৈ নিৰ্ণয় কৰা ।

**4.** Answer any *one* of the following questions : 10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো এটাৰ উত্তৰ লিখা :

*(a)* Use both Jacobi method and Gauss-Seidel method to solve the following system of linear equations up to three iterations :

$$4x+y+z=7$$
$$x+5y+2z=-8$$
$$2x+y+6z=6$$

*(i)* Write the iteration formulas for Jacobi and Gauss-Seidel methods.

*(ii)* Perform three iterations using each method.

*(iii)* Compare the approximate values $(x, y, z)$ obtained from both methods.

*(iv)* Comment on which method converges faster based on your results.

Jacobi method আৰু Gauss-Seidel method ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণ তিনিটা iteration লৈ সমাধান কৰা :

$$4x+y+z=7$$
$$x+5y+2z=-8$$
$$2x+y+6z=6$$

*(i)* Jacobi আৰু Gauss-Seidel পদ্ধতিত ব্যৱহাৰ হোৱা iteration formula লিখা।

*(ii)* প্ৰতিটো পদ্ধতিত তিনিটো iteration ৰ মান উলিওৱা।

*(iii)* দুয়োটা পদ্ধতিত পোৱা প্ৰায়মানসমূহ $(x, y, z)$ তুলনা কৰা।

*(iv)* পোৱা ফলাফলৰ ভিত্তিত কোন পদ্ধতিত দ্ৰুতভাৱে converge কৰে সেই বিষয়ে লিখা।

*(b)* Using the Lagrange interpolation formula, estimate the value of $f(2\cdot5)$ from the following data :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | : | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | : | 1 | 4 | 9 | 16 |

Steps :

*(i)* Write the general Lagrange interpolation formula.

*(ii)* Construct the Lagrange's polynomial using the given data.





*(iii)* Use the polynomial to compute $f(2\cdot5)$.

*(iv)* Comment on whether the result matches the expected behaviour of the function.

Lagrange interpolation formula ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ তথ্যৰ পৰা $f(2\cdot5)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | : | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | : | 1 | 4 | 9 | 16 |

ধাপসমূহ :

*(i)* সাধাৰণ Lagrange interpolation formula লিখা।

*(ii)* দিয়া তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি Lagrange's polynomial গঠন কৰা।

*(iii)* Polynomial ব্যৱহাৰ কৰি $f(2\cdot5)$ ৰ মান উলিওৱা।

*(iv)* ফলাফলটো কি ফলনৰ ব্যৱহাৰৰ সৈতে মিল খায় নে নাই মন্তব্য কৰা।

*(c)* The rate of change of a population $P(t)$ is given by the differential equation

$$\frac{dP}{dt}=0\cdot5P$$

with initial condition $P(0)=100$. Use Euler's method with a step size $\Delta t=0\cdot2$ to approximate the population at $t=0\cdot4$.

যদি জনসংখ্যাৰ পৰিবৰ্তনৰ হাৰ $P(t)$, তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণৰে দিয়া হৈছে

$$\frac{dP}{dt} = 0 \cdot 5P$$

প্ৰাৰম্ভিক অৱস্থা $P(0) = 100$. Euler পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ধাপৰ মান $\Delta t = 0 \cdot 2$ লৈ $t = 0 \cdot 4$ সময়ত জনসংখ্যাৰ প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) The displacement $x(t)$ of a particle at different times is given below :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t(s)$ | : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x(m)$ | : | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 |

Find :

(i) Use the forward difference formula to approximate the first derivative $\frac{dx}{dt}$ at $t = 1$ and $t = 2$.

(ii) Use the central difference formula to approximate the second derivative $\frac{d^2x}{dt^2}$ at $t = 2$.

এটা কণাৰ স্থানান্তৰ $x(t)$ তলত দিয়া সময়ত দিয়া হৈছে :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t(s)$ | : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x(m)$ | : | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 |



*( Continued )*



মান নিৰ্ণয় কৰা :

(i) Forward difference formula ব্যৱহাৰ কৰি $t = 1$ আৰু $t = 2$ত প্ৰথম প্ৰকাৰৰ অন্তৰক $\frac{dx}{dt}$ প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Central difference formula ব্যৱহাৰ কৰি $t = 2$ত দ্বিতীয় প্ৰকাৰৰ অন্তৰক $\frac{d^2x}{dt^2}$ প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

★★★