Total number of printed pages–15

1 (Sem–1/FYUGP) MAT41MJ

2025

MATHEMATICS

(Major)

Paper : MAT4100104 MJ

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) How many different ways can a non-zero complex number be expressed in polar form ?

এটা অশূন্য জটিল সংখ্যাক ধ্ৰুবীয় ৰূপত কিমানটা ভিন্ন ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি?

(i) Only one way

কেৱল এটা ধৰণে

(ii) Two ways

দুটা ধৰণেৰে

(iii) Infinitely many ways

অসীম বহু ধৰণেৰে

(iv) Four ways

চাৰি ধৰণেৰে

(b) For n>1, the sum of all distinct *n*th roots of unity is ________.

$n > 1$ ৰ বাবে এককৰ সকলো nতম স্বতন্ত্ৰ মূলৰ যোগফল হ'ল ________।

(c) Is the statement "The exponential and logarithmic functions are inverse to each other for all non-zero complex numbers" true or false?

"সকলো অশূন্য জটিল সংখ্যাৰ বাবে ঘাতীয় আৰু লগাৰিথমিক ফলন ইটোৱে সিটোৰ বিপৰীত" উক্তিটো সঁচা নে মিছা?

(d) If an algebraic equation is of degree n, which of the following statements is always true?

যদি বীজগণিতীয় সমীকৰণ এটা n ঘাতৰ হয়, তেন্তে তলৰ কোনটো উক্তি সদায় সত্য?

(i) It can have at most $n-1$ roots

ইয়াৰ সৰ্বাধিক $n-1$ মূল থাকিব পাৰে

(ii) It has exactly n distinct real roots

ইয়াৰ ঠিক n টা পৃথক বাস্তৱ মূল আছে

(iii) It has n roots in total, real or complex

ইয়াৰ মুঠতে n টা মূল আছে, বাস্তৱ বা জটিল

(iv) It can have infinitely many roots

ইয়াৰ মূল অসীম সংখ্যক হ'ব পাৰে

(e) For a polynomial with real coefficients, the number of positive real roots is equal to the number of sign changes or less by a multiple of ________.

বাস্তৱ সহগ থকা বহুপদৰ বাবে ধনাত্মক বাস্তৱ মূলৰ সংখ্যা চিহ্ন পৰিৱৰ্তনৰ সংখ্যাৰ সমান বা ________ ৰ বহুগুণে কম হয়।

(f) Which of the following statements is correct about the equation $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$?

সমীকৰণ $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ সম্পৰ্কে তলৰ কোনটো উক্তি সঁচা?

(i) Cardan's method can be applied, but Euler's method cannot

কাৰ্ডানৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি, কিন্তু অইলাৰৰ পদ্ধতি নোৱাৰি

(ii) Euler's method can be applied, but Cardan's method is not suitable

অইলাৰৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি, কিন্তু কাৰ্ডানৰ পদ্ধতি উপযোগী নহয়

(iii) Both Cardan's and Euler's methods can be applied

কাৰ্ডান আৰু অইলাৰৰ দুয়োটাই ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি

(iv) Neither method can be applied

দুয়োটা পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি

(g) State whether the following statement is true *or* false :

নিম্নলিখিত উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা ঃ

For *any two* 2×2 matrices A and B, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ holds always.

যিকোনো দুটা 2×2 মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ বাবে, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ সদায় বৈধ।

(h) A system of m linear equations in n unknowns is called inconsistent if it has :

n টা অজান সংখ্যা থকা m টা ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰণালী এটা অসামঞ্জস্যপূৰ্ণ বুলি কোৱা হয় যদি ঃ

(i) Exactly a single root satisfying all equations

সকলো সমীকৰণ পূৰণ কৰা ঠিক এটা মূল থাকে

(ii) No common root that satisfies every equation

প্ৰতিটো সমীকৰণ পূৰণ কৰা কোনো সাধাৰণ মূল না থাকে

(iii) Multiple roots satisfying all equations simultaneously

সকলো সমীকৰণ একেলগে পূৰণ কৰা একাধিক মূল থাকে

(iv) None of the above

ওপৰৰ কোনোটোৱেই নহয়

2. Answer ***any six*** questions : 2×6=12

যিকোনো ছটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the *arg (z)*, where $z = -1 + i\sqrt{3}$.

$z = -1 + i\sqrt{3}$ হ'লে, *arg (z)* নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Solve $x^2+x+1=0$, using the idea of nth roots of unity.

$x^2+x+1=0$ সমীকৰণটো n-তম একক মূলৰ ধাৰণাৰ সহায়ত সমাধান কৰা।

(c) Find the range of $f(z)=e^z$, where z is a non-zero complex number.

z এটা অশূন্য জটিল সংখ্যা হ'লে, $f(z)=e^z$ ৰ পৰিসৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find the general solution of $\cosh z=-2$.

$\cosh z=-2$ ৰ সাধাৰণ সমাধান দিয়া।

(e) Using Descartes' Rule of Signs, determine the possible number of real and complex roots of the equation $x^4-3x^3+3x^2-x+2=0$.

ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি সমীকৰণ $x^4-3x^3+3x^2-x+2=0$ ৰ বাস্তৱ মূল আৰু জটিল মূলৰ সম্ভাব্য সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

(f) If α and β are the roots of the equation $ax^2-bx+c=0$, express the sum and product of the roots in terms of the coefficients.

যদি α আৰু β সমীকৰণ $ax^2-bx+c=0$ ৰ মূল হয়, তেন্তে মূলৰ যোগফল আৰু গুণফল সহগসমূহৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।

(g) Define symmetric functions of the roots of an equation. Give *one* example.

সমীকৰণ এটাৰ মূলৰ প্ৰতিসম ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা উদাহৰণ দিয়া।

(h) If A is a square matrix such that $A^T=-A$, what special property does A have? Explain briefly.

যদি A এটা বৰ্গ আকাৰৰ মৌলকক্ষ হয় আৰু $A^T=-A$ হয়, তেন্তে A-ৰ বিশেষ গুণটো কি? সংক্ষিপ্তভাৱে বিৱৰণ কৰা।

(i) If a square matrix A satisfies $A^2=0$ (the zero matrix), can A^{-1} exist? Justify your answer.

যদি এটা বৰ্গ আকাৰৰ মৌলকক্ষ Aৰ বাবে $A^2=0$ (শূন্য মৌলকক্ষ) হয়, তেন্তে A^{-1} অস্তিত্ব থাকিব পাৰে নেকি? উত্তৰটো যুক্তিসহ দিয়া।

(j) When does a homogeneous system of linear equations have only the trivial solution, and when does it have infinitely many solutions?

সমজাতীয় ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰণালীৰ কেৱল শূন্য সমাধান কেতিয়া থাকে, আৰু অসীম সংখ্যক সমাধান কেতিয়া থাকে?

3. Answer ***any two*** of *(a)*, *(b)*, *(c)* and *(d)*', '***either*** *(e)* ***or*** *(f)*' and '***either*** *(g)* ***or*** *(h)*' : 5×4=20

উত্তৰ দিয়া *(a)*, *(b)*, *(c)* আৰু *(d)*ৰ *যিকোনো দুটা* *(e)* *অথবা* *(f)* আৰু *(g)* *অথবা* *(h)* :

(a) Let z_1 and z_2 be non-zero complex numbers with principal arguments θ_1 and θ_2. Find the principal argument of $z_1 z_2$ and explain your reasoning in detail.

ধৰা হ'ল z_1 আৰু z_2 দুটা অশূন্য জটিল সংখ্যা, যাৰ প্ৰধান প্ৰসাৰণ θ_1 আৰু θ_2। $z_1 z_2$-ৰ প্ৰধান প্ৰসাৰণ উলিওৱা আৰু যুক্তি সম্পূৰ্ণ ৰূপে ব্যাখ্যা কৰা।

(b) Let $n > 1$ be a positive integer. Find all real n-th roots of 1 for the cases when n is even and when n is odd.

ধৰা হ'ল $n > 1$ এটা ধনাত্মক পূৰ্ণসংখ্যা। n যুগ্ম সংখ্যা আৰু n অযুগ্ম সংখ্যা হোৱা ক্ষেত্ৰত 1-ৰ সকলো বাস্তৱ n-তম মূলসমূহ উলিওৱা।

(c) Use De Moivre's theorem to expand $tan(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)$, where $\theta_1, ..., \theta_n$ are real, in terms of the elementary symmetric sums of $\tan\theta_i$, and state the final (highest-order) term of the numerator and denominator.

ডে মইভ্ৰৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $tan(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)$ প্ৰসাৰণ কৰা, য'ত $\theta_{1, ...} \theta_n$ বাস্তৱ সংখ্যা। ফলাফলটো $tan\,\theta_i$ ৰ মৌলিক প্ৰতিসম যোগফল (elementary symmetric sum) ৰ ৰূপত লিখা, আৰু লৱ আৰু হৰৰ অন্তিম (উচ্চতম ক্ৰমৰ) পদটো উল্লেখ কৰা।

(d) Express $Log\left[Log(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)\right] (0 < \theta < \pi)$ in the form $x + iy$, where x, y are real.

$0 < \theta < \pi$ হলে, $Log\left[Log(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)\right]$ ক $x + iy$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰা, য'ত x, y বাস্তৱ সংখ্যা।

(e) Solve $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ using the condition that it has four distinct roots of equal modulus, without direct factorization.

$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ সমাধান কৰা এই চৰ্ত ব্যৱহাৰ কৰি যে ইয়াৰ সমান মান (modulus) ৰ চাৰিটা স্বতন্ত্ৰ মূল আছে, পোনপটীয়াকৈ গুণনীয়কৰণ নকৰি।

(f) If the roots of the quadratic equation $x^2 - 5x + 6 = 0$ are transformed such that each root is increased by 3, form the new quadratic equation whose roots are the transformed roots.

যদি $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলসমূহক এনে ধৰণে পৰিৱৰ্তন কৰা হয় যে প্ৰতিটো মূল 3ৰে বঢ়োৱা হয়, তেন্তে নতুন দ্বিঘাত সমীকৰণটো গঠন কৰা, যাৰ মূলসমূহ এই পৰিৱৰ্তিত মূলসমূহ।

(g) Explain whether the sets of all symmetric and all skew-symmetric matrices are each closed under matrix addition.

সকলো প্ৰতিসম (symmetric) আৰু তিৰ্যক-প্ৰতিসম (skew-symmetric) মৌলকক্ষৰ সমষ্টিসমূহে মৌলকক্ষৰ যোগৰ ক্ষেত্ৰত বন্ধগুণ (closure property) মানি চলে নে নাই ব্যাখ্যা কৰা।

(h) Find the reduced row echelon form of the following matrix and determine its rank.

নিম্নলিখিত মৌলকক্ষটোক হ্ৰাস শাৰীৰ ইচেলন (reduced row echelon) আকৃতিলৈ নিয়া আৰু ইয়াৰ জাতি (rank) নিৰ্ধাৰণ কৰা।

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Answer ***'either*** *(a)* ***or*** *(b)'* and ***'any one*** of *(c), (d)* and *(e)'*: 10×2=20

উত্তৰ দিয়া *(a) অথবা (b) আৰু (c), (d) আৰু (e)ৰ যিকোনো এটা* ঃ

(a) (i) Prove that $(\exp z)^n = \exp(nz)$ for all integers n, considering separately the cases $n > 0$, $n = 0$ and $n < 0$. 4

যিকোনো পূৰ্ণসংখ্যা n-ৰ বাবে $(\exp z)^n = \exp(nz)$ প্ৰমাণ কৰা, $n > 0, n = 0$ আৰু $n < 0$ ক্ষেত্ৰসমূহ পৃথকে পৃথকে বিবেচনা কৰি।

(ii) For the cubic equation $x^3 - 4x^2 + px - q = 0$, two of its roots are 1 and $(p-2)$. Using only the relations between roots and coefficients, find the values of p and q. 6

ঘন সমীকৰণ $x^3 - 4x^2 + px - q = 0$ ৰ দুটা মূল হৈছে আৰু $(p-2)$। কেৱল মূল আৰু সহগসমূহৰ মাজৰ সম্পৰ্ক ব্যৱহাৰ কৰি p আৰু q ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) *(i)* Prove that *sinh z*, *cosh z* and *tanh z* are periodic functions, and determine the period of each. 4

sinh z, *cosh z* আৰু *tanh z* সময়কালীন ফলন (periodic function) বুলি প্ৰমাণ কৰা আৰু প্ৰত্যেকৰে সময়কাল (period) নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডানৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা ঃ

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \cdot$$

(c) *(i)* If $AB = I$ for square matrices A and B of the same order, prove that $B = A^{-1}$. 4

যদি একে ক্ৰমৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ বাবে $AB = I$ হয়, প্ৰমাণ কৰা যে $B = A^{-1}$।

(ii) Prove that the following statements for a square matrix A are equivalent : 6

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ৰ বাবে তলত দিয়া উক্তিবোৰ সমতুল্য ঃ

- A is nonsingular.

  A পৰাবৰ্তনীয় (nonsingular) হয়।

- The equation $Ax = 0$ has only the trivial solution.

  সমীকৰণ $Ax = 0$ কেৱল তাৎপৰ্য্যহীন সমাধান (trivial solution) থাকে।

- $\det(A) \neq 0$.

  A-ৰ ডিটাৰমিনেণ্ট শূন্যৰ সমান নহয়।

(d) *(i)* Explain briefly how the augmented matrix of a linear system of equations helps in determining whether the system is consistent. 4

ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা প্ৰণালীৰ বৰ্ধিত মৌলকক্ষই (augmented matrix) কেনেদৰে সেই প্ৰণালীটো সামঞ্জস্যপূৰ্ণ (consistent) হয় নে নহয় নিৰ্ণয় কৰাত সহায় কৰে চমুকৈ ব্যাখ্যা কৰা।

(ii) Test the consistency of the following system of equations and solve if it is consistent. 6

নিম্নলিখিত সমীকৰণ প্ৰণালীৰ সামঞ্জস্যতা পৰীক্ষা কৰা আৰু ই সামঞ্জস্যপূৰ্ণ হলে সমাধান কৰা ঃ

$$x+y+z=6,$$
$$2x+3y+z=10,$$
$$x+2y+2z=8.$$

(e) *(i)* For a homogeneous system $Ax=0$, explain how the number of free variables in the reduced matrix relates to the number of possible solutions. 4

ৰৈখিক সমীকৰণৰ এক সমজাতীয় প্ৰণালী $Ax=0$ ৰ ক্ষেত্ৰত, হ্ৰাসিত মৌলকক্ষৰ মুক্ত চলকৰ সংখ্যা সম্ভাব্য সমাধানৰ সংখ্যাৰ সৈতে কেনেকৈ জড়িত সেই বিষয়ে ব্যাখ্যা কৰা।

(ii) Determine all solutions of the following homogeneous system : 6

নিম্নলিখিত সমজাতীয় প্ৰণালীটোৰ সকলো সমাধান নিৰ্ধাৰণ কৰা ঃ

$$x+2y-z=0,$$
$$2x+5y-3z=0,$$
$$3x+8y-5z=0.$$
