

Total number of printed pages-15

1 (Sem-3/FYUGP) MAT41 MJ

2025

MATHEMATICS

(Major)

Paper : MAT4300104MJ

(Ordinary Differential Equations)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) How many independent variables are involved in an ordinary differential equation ?

এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণত কিমানটা স্বতন্ত্র চলক যুক্ত হৈ থাকে ?

(b) Consider the equation (তলৰ সমীকৰণটো
লোৱা) $(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0$.
Can this equation be reduced to a
homogeneous equation?

এই সমীকৰণটো এটা সমমাত্রিক সমীকৰণলৈ হুস কৰিব
পাৰি নে?

(c) Find the integrating factor of the linear
differential equation $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3y = 1$.

বৈধিক অৱকল সমীকৰণ $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3y = 1$ ৰ
অনুকলন গুণক উলিওৱা।

(d) Define Wronskian of the real functions
 f_1, f_2, \dots, f_n in $a \leq x \leq b$.

$a \leq x \leq b$ অন্তৰালত বাস্তৱ ফলন

f_1, f_2, \dots, f_n ৰ Wronskian বৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Find the general solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা।

(f) State one difference between
complementary function and particular
integral related to solutions of
differential equations.

অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানৰ লগত যুক্ত পূৰক ফলন
আৰু বিশেষ অনুকলৰ মাজৰ এটা পাৰ্থক্য লিখা।

(g) Can method of undetermined co-
efficients be applied to find particular
integral of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot ax$? Give
reasons.

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot ax$ ৰ বিশেষ অনুকল নিৰ্ণয় কৰিবলৈ
অনুরোধ কৰিব।

(h) Examine whether the functions x^2
and $\frac{1}{x}$ are linearly independent or not.

x^2 আৰু $\frac{1}{x}$ ফলন দুটা বৈধিক ভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয় নে
পৰীক্ষা কৰা।

2. Answer **any six** of the following questions :
 $2 \times 6 = 12$

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰ যিকোনো হৱাটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is meant by implicit and explicit solution of a differential equation ?

এটা অৱকল সমীকৰণৰ অস্পষ্ট বা পৰোক্ষ আৰু স্পষ্ট বা প্ৰত্যক্ষ সমাধান মানে কি বুজায় ?

(b) Find the most general function $N(x, y)$ such that the differential equation

$$(x^3 + xy^2)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ is exact.}$$

এটা অতি সাধাৰণ ফলন $N(x, y)$ উলিওৱা যাতে

$$(x^3 + xy^2)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ অৱকল}$$

সমীকৰণটো যথাৰ্থ হয়।

(c) Find the integrating factor of

অনুকলন গুণক উলিওৱা

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0.$$

(d) Write the general form of an n^{th} order Cauchy-Euler equation.

What transformation reduces it to a linear differential equation with constant co-efficients.

এটা n তম ঘাতৰ কচি-ইউলাৰ সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপটো লিখা।

কি ৰূপান্তৰে ইয়াক এটা ধৰক সহগ বিশিষ্ট বৈধিক সমীকৰণলৈ হ্রাস কৰে ?

(e) Show that $\sin 3x$ and $\cos 3x$ are linearly independent solutions of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$.

দেখুওৱা যে $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ $\sin 3x$ আৰু $\cos 3x$ দুটা বৈধিক ভাৱে স্বতন্ত্র সমাধান হয়।

(f) Explain briefly how a Bernoulli equation can be transformed to a linear equation.

এটা বার্ণলী সমীকৰণ কেনেকৈ এটা বৈধিক সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি চমুকৈ ব্যাখ্যা কৰা।

(g) The general solution of a second order homogeneous linear differential equation with constant co-efficients is $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Construct the equation.

এটা দ্বিঘাতৰ ধৰক সহগ যুক্ত সমমাত্রিক বৈধিক অৱকল
সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
সমীকৰণটো গঠন কৰা।

(h) Find the general solution :

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0$$

(i) Find the particular integral of :

বিশেষ অনুকল উলিওৱা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = e^{2x} + 2$$

(j) Define total differential of a function $F(x, y)$. 1+1=2

Find total differential of

$$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y.$$

$F(x, y)$ ফলনটোৰ পূৰ্ণ অৱকলৰ সংজ্ঞা দিয়া।

$$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y \text{ ফলনটোৰ পূৰ্ণ অৱকল
উলিওৱা।}$$

3. Answer **any four** of the following questions : 5x4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that $x^3 + 3xy^2 = 1$ is an implicit solution of the differential equation

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0 \text{ on the interval } 0 < x < 1.$$

দেখুওৱা যে $0 < x < 1$ অন্তৰালত

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0 \text{ অৱকল সমীকৰণটোৰ
} x^3 + 3xy^2 = 1 \text{ এটা অন্তনিহিত সমাধান হয়।}$$

(b) Solve the initial value problem

প্রারম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান করা

$$(y+2)dx + y(x+4y)dy = 0, \quad y(-3) = -1$$

(c) Solve by reducing to homogeneous equation.

সমমাত্রিক সমীকরণলৈ হ্রাস কৰি সমাধান কৰা

$$(5x+2y+1)dx + (2x+y+1)dy = 0.$$

(d) Solve the Bernoulli equation

বার্নলী সমীকরণটো সমাধান কৰা

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2 y^3.$$

(e) Given $y = x+1$ is a solution of the differential equation :

$$(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3(x+1) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Find a linearly independent solution by reducing the order.

$$(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3(x+1) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

অরকল সমীকরণটোৰ $y = x+1$ এটা সমাধান হয়।
সমীকরণটোৰ মাত্রা হ্রাস কৰি আনটো বৈধিক ভাৰে স্বতন্ত্র
সমাধান উলিওৱা।

(f) Solve (সমাধান কৰা) :

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x) \quad \text{where (য'ত)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0.$$

(g) Solve the initial value problem :

প্রারম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 4xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(h) Solve the Cauchy-Euler equation :

কচি - ইউলাৰ সমীকরণটো সমাধান কৰা :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

4. Answer **any two** of the following questions :

10×2=20

তলত দিয়া প্রশ্নবোরৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Consider the differential equation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Where M and N have continuous first partial derivatives at all points (x, y) in it's domain D .

Prove that the equation is exact in D if

and only if $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, for all $(x, y) \in D$

এটা অৱকল সমীকৰকণ লোৱা হ'ল

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

য'ত M আৰু N দুয়োটা ফলনৰে আদিক্ষেত্র D ৰ প্রতিটো বিন্দু (x, y) ত অৱিচ্ছিন্ন আংশিক অৱকল থাকে।

প্ৰমাণ কৰা যে, সমীকৰণটো যথার্থ হব যদি আৰু যদিহে

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D \quad \text{হয়।}$$

(b) (i) Prove that if f and g are two different solutions of

3

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

then $f - g$ is a solution of the equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

দেখুওৱা যে $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ অৱকল

সমীকৰণটোৰ যদিহে f আৰু g দুটা সমাধান হয়

তেন্তে $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ সমীকৰণটোৰ $f - g$

এটা সমাধান হব।

(ii) Consider the differential equation

$$(4x + 3y^2)dx + 2xy dy = 0$$

(I) Show that the equation is not exact.

(II) Find an integrating factor of the form x^n , where n is a positive integer.

(III) Multiply the given equation by the integrating factor found in (II) and solve the resulting exact equation.

$$1+2+4=7$$

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো লোৱা।

$$(4x + 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

(I) দেখুওৱা যে সমীকৰণটো যথার্থ ন হয়।

(II) এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে সমীকৰণটোৰ x^n আহিৰ অনুকলন গুণকটো উলিওৱা।

(III) (II) ত প্রাপ্ত অনুকলন গুণকেৰে সমীকৰণটো পূৰণ কৰি লক্ষ যথার্থ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Solve by method of variation of parameters

প্রাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতিবে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}.$$

(d) Find the general solution

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sin 2x + e^x.$$

(e) (i) Can the method of undetermined co-efficients be applied to find particular integral of all types of linear non-homogeneous differential equations with constant co-efficients ? Explain. 2

অনিশ্চয় সহগ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সকলোধৰণৰ ধৰক সহগ বিশিষ্ট বিসমমাত্ৰিক বৈধিক অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ অনুকল উলিওৱা সম্ভৱ নে ?
ব্যাখ্যা কৰা।

(ii) The particular integral assumed by the method of undetermined coefficients for the differential

equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}$

is $y_p = Ae^{4x}$

where as by the same method the particular integral assumed for the

equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$

is $y_p = Axe^{3x}$.

Explain the validity of the assumptions. 8

অনিশ্চয় সহগ পদ্ধতি ব্যবহার করি

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}$$

অবকল সমীকরণৰ বাবে ধৰি লোৱা বিশেষ অনুকল

হৈছে $y_p = Ae^{4x}$

আনহাতে একেই পদ্ধতিৰে

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$$

সমীকরণৰ বাবে ধৰি লোৱা বিশেষ অনুকল হৈছে

$$y_p = Axe^{3x}$$

দুইটা ধাৰণাৰে বৈধতা ব্যাখ্যা কৰা।