

Total number of printed pages-15

1 (Sem-3/FYUGP) MAT41 MJ

2025

MATHEMATICS

(Major)

Paper : MAT4300104MJ

(Ordinary Differential Equations)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) How many independent variables are involved in an ordinary differential equation ?

এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণত কিমানটা স্বতন্ত্ৰ চলক
যুক্ত হৈ থাকে ?

- (b) Consider the equation (তলৰ সমীকৰণটো লোৱা) $(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0$. Can this equation be reduced to a homogeneous equation?

এই সমীকৰণটো এটা সমমাত্ৰিক সমীকৰণলৈ হ্ৰাস কৰিব পাৰি নে?

- (c) Find the integrating factor of the linear differential equation $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 1$.

ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 1$ ৰ অনুকলন গুণক উলিওৱা।

- (d) Define Wronskian of the real functions f_1, f_2, \dots, f_n in $a \leq x \leq b$.

$a \leq x \leq b$ অন্তৰালত বাস্তৱ ফলন

f_1, f_2, \dots, f_n ৰ Wronskian ৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (e) Find the general solution of $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$.

$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ ৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা।

- (f) State one difference between complementary function and particular integral related to solutions of differential equations.

অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানৰ লগত যুক্ত পূৰক ফলন আৰু বিশেষ অনুকলৰ মাজৰ এটা পাৰ্থক্য লিখা।

- (g) Can method of undetermined coefficients be applied to find particular integral of $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cot ax$? Give reasons.

$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cot ax$ ৰ বিশেষ অনুকল নিৰ্ণয় কৰিবলৈ অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি নে? যুক্তি দিয়া।

- (h) Examine whether the functions x^2 and $\frac{1}{x}$ are linearly independent or not.

x^2 আৰু $\frac{1}{x}$ ফলন দুটা ৰৈখিক ভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয় নে পৰীক্ষা কৰা।

2. Answer **any six** of the following questions :
2×6=12

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is meant by implicit and explicit solution of a differential equation ?

এটা অৱকল সমীকৰণৰ অস্পষ্ট বা পৰোক্ষ আৰু স্পষ্ট বা প্ৰত্যক্ষ সমাধান মানে কি বুজায় ?

(b) Find the most general function $N(x, y)$ such that the differential equation $(x^3 + xy^2)dx + N(x, y)dy = 0$ is exact.

এটা অতি সাধাৰণ ফলন $N(x, y)$ উলিওৱা যাতে

$$(x^3 + xy^2)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ অৱকল}$$

সমীকৰণটো যথার্থ হয়।

(c) Find the integrating factor of

অনুকলন গুণক উলিওৱা

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0.$$

(d) Write the general form of an n^{th} order Cauchy-Euler equation.

What transformation reduces it to a linear differential equation with constant co-efficients.

এটা n তম ঘাতৰ কচি-ইউলাৰ সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপটো লিখা।

কি ৰূপান্তৰে ইয়াক এটা ধ্ৰুৱক সহগ বিশিষ্ট ৰৈখিক সমীকৰণলৈ হ্ৰাস কৰে ?

(e) Show that $\sin 3x$ and $\cos 3x$ are linearly independent solutions of the differential

$$\text{equation } \frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0.$$

দেখুওৱা যে $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ

$\sin 3x$ আৰু $\cos 3x$ দুটা ৰৈখিক ভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান হয়।

(f) Explain briefly how a Bernoulli equation can be transformed to a linear equation.

এটা বাৰ্ণলী সমীকৰণ কেনেকৈ এটা ৰৈখিক সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি চমুকৈ ব্যাখ্যা কৰা।

- (g) The general solution of a second order homogeneous linear differential equation with constant co-efficients is $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Construct the equation.

এটা দ্বিঘাতৰ ধ্ৰুবক সহগ যুক্ত সমমাত্ৰিক বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ সমীকৰণটো গঠন কৰা।

- (h) Find the general solution :

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y = 0$$

- (i) Find the particular integral of :

বিশেষ অনুকল উলিওৱা :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = e^{2x} + 2$$

- (j) Define total differential of a function $F(x, y)$. 1+1=2

Find total differential of

$$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y.$$

$F(x, y)$ ফলনটোৰ পূৰ্ণ অৱকলৰ সংজ্ঞা দিয়া।

$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y$ ফলনটোৰ পূৰ্ণ অৱকল উলিওৱা।

3. Answer **any four** of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Show that $x^3 + 3xy^2 = 1$ is an implicit solution of the differential equation

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0 \text{ on the interval}$$

$$0 < x < 1.$$

দেখুওৱা যে $0 < x < 1$ অন্তৰালত

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0 \text{ অৱকল সমীকৰণটোৰ}$$

$x^3 + 3xy^2 = 1$ এটা অন্তৰ্নিহিত সমাধান হয়।

(b) Solve the initial value problem

প্রাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা

$$(y+2)dx + y(x+4y)dy = 0, \quad y(-3) = -1$$

(c) Solve by reducing to homogeneous equation.

সমমাত্রিক সমীকৰণলৈ হ্রাস কৰি সমাধান কৰা

$$(5x+2y+1)dx + (2x+y+1)dy = 0.$$

(d) Solve the Bernoulli equation

বাৰ্ণলী সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2 y^3.$$

(e) Given $y = x+1$ is a solution of the differential equation :

$$(x+1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3(x+1) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Find a linearly independent solution by reducing the order.

$$(x+1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3(x+1) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ $y = x+1$ এটা সমাধান হয়।
সমীকৰণটোৰ মাত্রা হ্রাস কৰি আনটো বৈধিক ভাৱে স্বতন্ত্ৰ
সমাধান উলিওৱা।

(f) Solve (সমাধান কৰা) :

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x) \quad \text{where (য'ত)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0.$$

(g) Solve the initial value problem :

প্রাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 4xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(h) Solve the Cauchy-Euler equation :

কচি - ইউলাৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

4. Answer **any two** of the following questions :
10×2=20

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Consider the differential equation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Where M and N have continuous first partial derivatives at all points (x, y) in its domain D .

Prove that the equation is exact in D if

$$\text{and only if } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ for all } (x, y) \in D$$

এটা অৱকল সমীকৰণ লোৱা হ'ল

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

য'ত M আৰু N দুয়োটা ফলনৰে আদিক্ষেত্ৰ D ৰ প্ৰতিটো বিন্দু (x, y) ত অৱিচ্ছিন্ন আংশিক অৱকল থাকে।

প্ৰমাণ কৰা যে, সমীকৰণটো যথার্থ হ'ব যদি আৰু যদিহে

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \forall (x, y) \in D \text{ হয়।}$$

- (b) (i) Prove that if f and g are two different solutions of 3

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

then $f - g$ is a solution of the equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

দেখুওৱা যে $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ অৱকল

সমীকৰণটোৰ যদিহে f আৰু g দুটা সমাধান হয়

তেন্তে $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ সমীকৰণটোৰ $f - g$

এটা সমাধান হ'ব।

- (ii) Consider the differential equation

$$(4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

- (I) Show that the equation is not exact.

(II) Find an integrating factor of the form x^n , where n is a positive integer.

(III) Multiply the given equation by the integrating factor found in (II) and solve the resulting exact equation.

$$1+2+4=7$$

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো লোৱা।

$$(4x + 3y^2)dx + 2xy dy = 0$$

(I) দেখুওৱা যে সমীকৰণটো যথার্থ ন হয়।

(II) এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে সমীকৰণটোৰ x^n আৰ্হিৰ অনুকলন গুণকটো উলিওৱা।

(III) (II) ত প্ৰাপ্ত অনুকলন গুণকেৰে সমীকৰণটো পূৰণ কৰি লব্ধ যথার্থ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Solve by method of variation of parameters

প্ৰাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}.$$

(d) Find the general solution

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sin 2x + e^x.$$

(e) (i) Can the method of undetermined co-efficients be applied to find particular integral of all types of linear non-homogeneous differential equations with constant co-efficients? Explain. 2

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সকলোধৰণৰ ধ্ৰুবক সহগ বিশিষ্ট বিসমমাত্ৰিক ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ অনুকল উলিওৱা সম্ভৱ নে? ব্যাখ্যা কৰা।

- (ii) The particular integral assumed by the method of undetermined coefficients for the differential

$$\text{equation } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}$$

$$\text{is } y_p = Ae^{4x}$$

where as by the same method the particular integral assumed for the

$$\text{equation } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$$

$$\text{is } y_p = Axe^{3x}.$$

Explain the validity of the assumptions. 8

অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}$$

অৱকল সমীকৰণৰ বাবে ধৰি লোৱা বিশেষ অনুকল

$$\text{হৈছে } y_p = Ae^{4x}$$

আনহাতে একেই পদ্ধতিৰে

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$$

সমীকৰণৰ বাবে ধৰি লোৱা বিশেষ অনুকল হৈছে

$$y_p = Axe^{3x}$$

দুইটা ধাৰণাৰে বৈধতা ব্যাখ্যা কৰা।