Total number of printed pages–11

1 (Sem–3/FYUGP) MAT41MN/(B)

2025

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT4300104 MN

(SET–B)

(Ordinary Differential Equation)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Write the order and degree of the following differential equation.

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণৰ মাত্ৰা আৰু ঘাত লিখা।

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y = 0$$

(b) Identify whether the equation

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y$ is a linear or non-linear.

সমীকৰণ $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$ টো ৰৈখিক নে অৰৈখিক চিনাক্ত কৰা।

(c) If (যদি)

$\frac{dy}{dx} = x + 1$, find y

তেনেহলে y ৰ মান উলিওৱা।

(d) Write *one* example of an exact differential equation.

এটা যথাৰ্থ অৱকল সমীকৰণৰ উদাহৰণ লিখা।

(e) What is the integrating factor for a linear differential equation

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$?

অৱকল সমীকৰণ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ৰ অনুকলন গুণক কি?

(f) Write the auxiliary equation for the differential equation

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

অৱকল সমীকৰণ $y'' - 3y' + 2y = 0$ ৰ সহায়ক সমীকৰণটো লিখা।

(g) For which type of non-homogeneous terms can the method of undetermined co-efficients be applied ?

কোন ধৰণৰ অসমমাত্ৰিক সমীকৰণৰ বাবে অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি?

(h) What is the formula for the particular integral using the method of variation of parameters for a second-order linear differential equation

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) ?$$

দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ ৰ প্ৰাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি বিশেষ অনুকলন উলিওৱা সূত্ৰটো কি?

2. Answer ***any six*** of the following questions : 2×6=12

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ ***যিকোনো ছয়টাৰ*** উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Find the general solution of :

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা ঃ

$$\left(2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0$$

(b) Solve the exact differential equation :

যথাৰ্থ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$\left(3x^2y + y^3\right)dx + \left(x^5 + 3xy^2\right)dy = 0$$

(c) Find the integrating factor for the equation —

অৱকল সমীকৰণটোৰ অনুকলন গুণকটো লিখা —

$$(y + 2x)dx + xdy = 0$$

(d) State the UC set of the following differential equation :

তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ UC সংহতিটো লিখা ঃ

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

(e) Find the Wronskian of the functions

$y_1 = \sin x$ and $y_2 = \cos x$.

তলৰ ফলনটোৰ ৰনস্কিয়ান লিখা ঃ

$y_1 = \sin x$ আৰু $y_2 = \cos x$

(f) Find the particular integral for the equation $\left(D^2 - 4\right)y = e^{2x}$.

অৱকল সমীকৰণ $\left(D^2 - 4\right)y = e^{2x}$ ৰ বিশেষ সমাকলনটো লিখা।

(g) Find the complementary function of the differential equation —

তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ পূৰক ফলনটো লিখা —

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

(h) Solve the non-homogeneous equation using the method of undetermined co-efficients :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$$

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে তলৰ অসমমাত্রিক সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$$

(i) Justify that $y = Ae^{3x}$ will not be particular solution of the differential equation —

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$ অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ সমাধান নহয় বুলি ব্যাখ্যা কৰা।

(j) Examine whether the functions $(\sin x, \cos x)$ are linearly independent or not.

ফলন $(\sin x, \cos x)$ ৰৈখিক স্বতন্ত্ৰ হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ ***যিকোনো চাৰিটাৰ*** উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve the differential equation —

অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা —

$$\left(2xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy = 0$$

(b) Solve the initial value problem :

প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}, \ y(0) = 1$$

(c) Solve the Bernoulli equation :

ৱাৰ্ণলী সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2y^2$$

(d) Solve the Cauchy-Euler equation :

কচ্চি-অইলাৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$$

(e) Solve the following initial value problem using method of undetermined co-efficients —

অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে তলত দিয়া প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+5y=2e^x+10e^{5x}$$

(f) Solve the linear non-homogeneous differential equation :

$$\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$$

ৰৈখিক অসমমাত্ৰিক সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$$

(g) Solve (সমাধান কৰা)

$$y''-5y'+6y=0$$

(h) Solve the initial value problem :

প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা ঃ

$$(y+2)dx+y(x+4)dy=0,\ \ y(-3)=-1$$

4. Answer ***any two*** of the following questions : 10×2=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ ***যিকোনো দুটাৰ*** উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve the differential equation using an integrating factor :

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$$

অনুকলন গুণক ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$$

(b) Solve the following differential equation

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$\left(2x^2+y\right)dx+\left(x^2y-x\right)dy=0$$

(c) Solve the following linear non-homogeneous differential equation using the method of undetermined co-efficients

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{2x}$$

তলৰ বৈখিক অসমমাত্রিক অৱকল সমীকৰণটো অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{2x}$$

(d) Solve the differential equation using the method of variation of parameters

অৱকল সমীকৰণটো প্ৰাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=tan\,x$$

(e) Solve the differential equation

অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0$$

1 (Sem–3/FYUGP) MAT42MN/(A)

2025

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT4300204 MN

(SET–A)

(Abstract Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : $1\times8=8$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Find the order of the element 3 in the group $U(10)$.

$U(10)$ গোটটোত 3 উপাদানটোৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Define centralizer of a group.

এটা গোটৰ কেন্দ্ৰীভূতকাৰীৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(c) Find the number of subgroups of a group of order 10.

10 মাত্ৰাৰ গোট এটাৰ উপগোটৰ সংখ্যা কিমান ?

(d) Let G be a finite group and $a \in G$ such that $o(a) = 4$.

ধৰো G এটা সসীম গোট আৰু $a \in G$ এনেকুৱা যাতে $o(a) = 4$.

Find (নির্ণয় কৰা) $o(a^2)$.

(e) Find the order of the cyclic permutation.

তলৰ চক্ৰীয় বিন্যাসটোৰ মাত্ৰা নির্ণয় কৰা।

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(f) Let G be a finite group and let $a \in G$.

ধৰো G এটা সসীম গোট আৰু $a \in G$.

Find (নির্ণয় কৰা) $a^{|G|}$.

(g) Let (ধৰো) $G = (Z, +)$ be a group (এটা গোট) and (আৰু) $N = (2Z, +)$, a subgroup (এটা উপগোট). Find (নির্ণয় কৰা)—

The index of N in G.

G ত Nৰ সূচক কিমান ?

(h) Does the ring $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ under addition modulo 10 and multiplication modulo 10 have a unity?

সংযোজন modulo 10 আৰু পূৰণ modulo 10-ৰ সাপেক্ষে $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ বলয়টোৰ এটা একক আছেনে ?

2. Answer ***any six*** questions : 2×6=12

তলৰ ***যিকোনো ছয়টা*** প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) In a group G, prove that

এটা গোট G-ত, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \ \forall a, \ b \in G$$

(b) Let G be a group and let $a \in G$

Prove that $\langle a \rangle$ is a subgroup of G.

ধৰো G এটা গোট আৰু $a \in G$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\langle a \rangle$ এটা উপগোট।

(c) Let (ধৰো)

$$GL(2, R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{matrix} , a, b, c, d \in R \\ , \text{and } ad - bc \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

is a (এটা) group (গোট) where (য'ত) the operation is defined as matrix multiplication (মৌলকক্ষৰ পূৰণ হ'ল দ্বৈতপ্ৰক্ৰিয়া).

Find the inverse of $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ মৌলটোৰ বিপৰীত মৌল নির্ণয় কৰা।

(d) List the elements of the subgroup $\langle 3 \rangle$ in $U(20)$.

$U(20)$ গোটটোত $\langle 3 \rangle$ উপগোটটোৰ মৌলকেইটা উলিওৱা।

(e) In the group Z_{12} find $|6|$ and $|2|$.

Z_{12} গোটটোত $|6|$ আৰু $|2|$ নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Let (ধৰো)

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

is a (এটা) permutation (বিন্যাস).

Find (নিৰ্ণয় কৰা) x^{-1}.

(g) Let H be a subgroup of G and $a \in G$.

ধৰো H এটা G গোটৰ উপগোট আৰু $a \in G$ ।

Then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা)

$aH = bH$ or (বা) $aH \cap bH = \phi$.

(h) Is Z_6 is subring of Z_{12} ? Justify.

Z_6, Z_{12} ৰ উপবলয় হয়নে ? বিশ্লেষণ কৰা।

(i) State true **or** false :

(শুদ্ধ *নে* অশুদ্ধ বিচাৰ কৰা)

"$Z \oplus Z$ is not an integral domain"

"$Z \oplus Z$ এটা integral domain নহয়"

Justify (বিশ্লেষণ কৰা).

(j) Find all maximal ideals in Z_n.

Z_n ৰ সকলো maximal ideal উলিওৱা।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Define center of a group. Prove that the center of a group G is a subgroup of G.

এটা গোটৰ কেন্দ্ৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোট G ৰ কেন্দ্ৰটো এটা উপগোট।

(b) If d is a positive divisor of n, then prove that the number of elements of order d in a cyclic group of order n is $\phi(d)$.

যদি d এটা n ৰ ধনাত্মক ভাজক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে এটা n মাত্ৰাৰ চক্ৰীয় গোটৰ d মাত্ৰাৰ মৌলৰ সংখ্যা হ'ল $\phi(d)$।

(c) For two finite subgroups H and K of a group if $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ then prove that

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

এটা গোটৰ দুটা সসীম উপগোট H আৰু K ৰ বাবে যদি $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

(d) Define normal subgroup. Prove that every subgroup of an Abelian group is normal.

সাধাৰণ উপগোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে এটা Abelian গোটৰ প্ৰতিটো উপগোটেই সাধাৰণ উপগোট।

(e) Prove that a subgroup H of a group G is normal in G if and only if $xHx^{-1} \subseteq H$, $\forall x \in G$.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোট Gৰ এটা উপগোট H সাধাৰণ উপগোট হ'ব যদি আৰু মাত্ৰ যদি $xHx^{-1} \subseteq H$, $\forall x \in G$।

(f) Show that A_8 contains an element of order 15.

দেখুওৱা যে A_8ত এটা 15 মাত্ৰাৰ মৌল থাকিব।

(g) Prove that the ideal $\langle x \rangle$ is a prime ideal in $Z[x]$, but not a maximal ideal in $Z[x]$.

প্ৰমাণ কৰা যে ideal $\langle x \rangle$ টো, $Z[x]$ ৰ prime ideal কিন্তু $Z[x]$ ৰ maximal ideal নহয়।

(h) Prove that a finite integral domain is a field.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা সসীম integral domain এটা ক্ষেত্ৰ হয়।

4. Answer ***any two*** questions : 10×2=20

তলৰ ***যিকোনো দুটাৰ*** উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Write out a complete Cayley table for the dihedral.

ডাইহেড্ৰালৰ বাবে এটা সম্পূৰ্ণ কেলি table লিখি উলিওৱা।

(b) Write out a complete Cayley table for D_3 (symmetrics of an equilateral triangle). Prove that D_3 is a group. Is it Abelian? 5+4+1=10

সমবাহু ত্ৰিভুজৰ প্ৰতিসাম্য D_3ৰ বাবে এখন সম্পূৰ্ণ Cayley তালিকা প্ৰস্তুত কৰা। প্ৰমাণ কৰা যে D_3 এটা গোট। ই Abelian হ'বনে ?

(c) Prove that a group of prime order is cyclic. Find an example of a non-cyclic group, all of whose proper subgroups are cyclic. 7+3=10

প্ৰমাণ কৰা যে এটা মৌলিক মাত্ৰাৰ গোট এটা চক্ৰীয় গোট। এটা অচক্ৰীয় গোটৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ সকলো প্ৰকৃত উপগোটেই চক্ৰীয় হয়।

(d) State and prove the Lagrange's theorem. Also prove that if G is a finite group and H is a subgroup of G, then

$$|G:H| = \frac{|G|}{|H|}.$$

7+3=10

Lagrangeৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। লগতে প্ৰমাণ কৰা যে যদি G এটা সসীম গোট আৰু H এটা Gৰ উপগোট হয়, তেন্তে

$$|G:H| = \frac{|G|}{|H|}$$

(e) Prove that the set A_n of all even permutations in the symmetric group S_n forms a normal subgroup of S_n.

প্ৰমাণ কৰা যে symmetric গোট S_n ৰ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতি A_n-এ এটা সাধাৰণ উপগোট গঠন কৰে।