Total number of printed pages – 20

3 (Sem–2/CBCS) MAT HG 1/2, RE

2025

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Answer the Questions from any one Option.

OPTION–A

Paper : MAT–HG–2016/MAT–RC–2016

(Algebra)

OPTION–B

Paper : MAT–HG–2026

(Discrete Mathematics)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

OPTION–A

Paper : MAT–HG–2016/MAT–RC–2016

(Algebra)

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) State *true* or *false* :

শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা :

Any group of prime order is cyclic.

মৌলিক মাত্ৰাৰ যিকোনো সংঘ চক্ৰীয়।

(ii) Find the value of $e^{i\pi}$.

$e^{i\pi}$ ৰ মান উলিওৱা।

(iii) Define a symmetric matrix.

সমমিত মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(iv) Give an example of a commutative ring without unity.

এটা ক্ৰম বিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ একক মৌল নাই।

(v) The square roots of $2i$ are

$2i$ ৰ বৰ্গমূলবোৰ হ'ল

(a) $\pm(-1-i)$

(b) $\pm(-1+i)$

(c) $\pm(1+i)$

(d) $\pm(1-i)$

(Choose the correct option)

(সঠিক বিকল্পটো বাছি উলিওৱা)

(vi) What is the rank of an identity matrix of order 2 ?

২ মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষৰ কোটি কিমান?

(vii) Let G be a group of order 6. Can there exist a subgroup of G whose order is 4 ?

ধৰা হ'ল G এটা 6 মাত্ৰাৰ সংঘ। G ৰ এনে এটা উপসংঘ থাকিব পাৰেনে যাৰ মাত্ৰা 4 ?

(viii) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা :

If $AB = C$, where B and C are matrices of order 3×5, then order of A is ____.

যদি $AB = C$, য'ত B আৰু C দুয়োটাই 3×5 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ, তেন্তে A ৰ মাত্ৰা হ'ব _____।

(ix) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা :

The number of generators of a cyclic group G of order 8 is ____.

এটা 8 মাত্ৰাৰ চক্ৰীয় সংঘ G ৰ জনকৰ সংখ্যা ____।

(x) When are two matrices said to be conformable for multiplication?

দুটা মৌলকক্ষক কেতিয়া পূৰণৰ বাবে উপযোগী বুলি কোৱা হয়?

2. Answer the following: 2×5=10

তলৰ দিয়াবোৰৰ উত্তৰ লিখা:

(i) If α, β, γ are roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the value of $\sum \alpha^2$

যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূল α, β, γ হয়, তেন্তে $\sum \alpha^2$ ৰ মান উলিওৱা।

(ii) Let R be a ring and $x^2 = x, \forall x \in R$. Prove that $2x = 0, \forall x \in R$.

ধৰা হ'ল R এটা বলয় আৰু $x^2 = x, \forall x \in R$. প্ৰমাণ কৰা যে $2x = 0, \forall x \in R$.

(iii) Give an example to show that the union of two subgroups of a group may not be a subgroup.

উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে, এটা সংঘৰ দুটা উপসংঘৰ মিলন এটা উপসংঘ নহ'বও পাৰে।

(iv) Find the rank of the following matrix:

তলত দিয়া মৌলকক্ষটোৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(v) Find the eigenvalues of the following matrix:

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ আইগেনমান উলিওৱা:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Answer ***any four*** questions: 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া:

(i) Define cyclic group and give an example.

If a is a generator of a cyclic group G, then prove that a^{-1} is also a generator of G. 2+3=5

চক্ৰীয় সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু এটা উদাহৰণ দিয়া।

যদি চক্ৰীয় সংঘ G ৰ a এটা জনক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে a^{-1} ও G ৰ এটা জনক।

(ii) Write the expansion of $\cos n\theta$ and hence show that

$$\cos 6\theta = \cos^6\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta$$
$$+15\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta$$

$\cos n\theta$ ৰ বিস্তৃতিটো লিখা আৰু ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে,

$$\cos 6\theta = \cos^6\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta$$
$$+15\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta$$

(iii) Prove that the intersection of two subrings of a ring is again a subring.

এটা বলয়ৰ দুটা উপবলয়ৰ ছেদনটো আকৌ এটা উপবলয় হয় বুলি প্ৰমাণ কৰা।

(iv) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, find the value of

$$(\beta+\gamma)^{-1} + (\gamma+\alpha)^{-1} + (\alpha+\beta)^{-1}$$

যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ α, β, γ মূল হয়, তেন্তে $(\beta+\gamma)^{-1} + (\gamma+\alpha)^{-1} + (\alpha+\beta)^{-1}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(v) In a group G, show that

এটা সংঘ G ত দেখুওৱা যে,

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \;\; \forall a, b \in G$ 2+3=5

(vi) If A is an $m \times n$ matrix such that rank $(A) = r$, then prove that

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

যদি A এটা $m \times n$ মৌলকক্ষ যাৰ কোটি r, প্ৰমাণ কৰা যে

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Answer ***any four*** questions : 10×4=40

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that the set

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

of all 2×2 matrices is a ring with unity under matrix addition and matrix multiplication.

Is this ring commutative? Justify your answer.

ধৰা হ'ল

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

এটা সকলো 2×2 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষৰ সংহতি। দেখুওৱা যে মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে M য়ে এটা বলয় গঠন কৰে।

এইটো বলয় ক্ৰম বিনিময় হয়নে? তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দৰ্শোৱা।

(b) (i) If A and B are non-singular matrices, then prove that AB is also non-singular such that

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ and $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 3+3=6

যদি A আৰু B অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, AB ও এটা অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ যাতে

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ আৰু $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(ii) Let A and B be two square matrices such that $AB = B$ and $AB = A$. Prove that $A^2 = A$ and $B^2 = B$ 4

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা বৰ্গ মৌলকক্ষ যাতে $AB = B$ আৰু $AB = A$। প্ৰমাণ কৰা যে, $A^2 = A$ আৰু $B^2 = B$।

(c) (i) Solve the equation $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ given that the difference of two of the roots is 3. 5

$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা যাৰ দুটা মূলৰ পাৰ্থক্য/অন্তৰ 3।

(ii) Solve the following homogeneous system of equations (if exist): 5

তলৰ সমাংগ সমীকৰণ প্ৰণালীটো সমাধান কৰা (যদি সমাধান আছে)ঃ

$$x + 3y + 2z = 0$$
$$x + 4y + 3z = 0$$
$$x + 5y + 4z = 0$$

(d) (i) Let A be a square matrix. For all $\alpha \notin \sigma(A)$, prove that x is an eigenvector of A if and only if x is an eigenvector of $(A - \alpha I)^{-1}$. 6

ধৰা হ'ল A এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ। সকলোবোৰ $\alpha \notin \sigma(A)$ ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে x, A ৰ এটা আইগেনভেক্টৰ যদি আৰু যদিহে x, $(A - \alpha I)^{-1}$ ৰ এটা আইগেনভেক্টৰ।

(ii) In a ring R, prove that

এটা বলয় R ত প্ৰমাণ কৰা যে

(a) $a.0 = 0$

(b) $a.(-b) = -(a.b)$

(c) $(-a).(-b) = a.b \quad \forall a, b \in R$

$1+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=4$

(e) (i) State and prove De Moivre's theorem for positive integral index. 1+5=6

ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(ii) If $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$, θ is real.

Prove that

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta,\ n\in\mathbb{Z}.$$

যদি $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$, θ বাস্তৱ, প্ৰমাণ কৰা

যে $x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\theta,\ n\in\mathbb{Z}.$ 4

(f) (i) Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে, G সংঘৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H নিজে G ৰ এটা উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ।

(ii) Solve the following equation using De Moivre's theorem: 5

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

$$x^7+x^4+x^3+1=0$$

(g) (i) Reduce the following matrix to row echelon form:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the rank and identify the basic columns 5

তলৰ মৌলকক্ষটো শাৰী এচেলন ৰূপলৈ লঘূকৃত কৰা :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

কোটি উলিওৱা আৰু মূলস্তম্ভ কেইটা চিনাক্ত কৰা।

(ii) Find the condition that the equation $x^3+px^2+qx+r=0$ should have two roots equal in magnitude but of opposite sign. 5

$x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণটোৰ দুটা মূল মানত সমান কিন্তু বিপৰীত চিহ্নযুক্ত হোৱাৰ চৰ্তটো নিৰ্ণয় কৰা।

(h) (i) If H is a subgroup of a finite group G, then prove that the order of H divides the order of G. 5

যদি H, এটা সীমিত সংঘ Gৰ উপসংঘ, তেনেহলে প্ৰমাণ কৰা যে, H-ৰ মাত্ৰাই G-ৰ মাত্ৰাক ভাগ কৰে।

(ii) Find the terms of p, q and r the values of the symmetric function

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$ where

α, β and γ are the roots of the cubic equation

$x^3+px^2+qx+r=0$ 5

p, q আৰু r ৰ সহায়ত

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$ সমমিত

ফলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত α, β আৰু γ হৈছে $x^3+px^2+qx+r=0$ ত্ৰিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল।

OPTION–B

Paper : MAT–HG–2026

(Discrete Mathematics)

1. Choose the correct option in each of the following questions : $1 \times 10 = 10$

   (a) Which of the following is equivalent to $a + ab$?

   (i) a

   (ii) ab

   (iii) $a(b+1)$

   (iv) b

   (b) The Boolean expression $(a+b).(a+c)$ is simplified to

   (i) $a+bc$

   (ii) $a.b.c$

   (iii) $a+b+c$

   (iv) None of the above

   (c) The dual of the expression $a+0=a$ is

   (i) $a.0=a$

   (ii) $a.1=a$

   (iii) $a+1=a$

   (iv) $a.0=0$

   (d) A lattice with exactly two elements is called a

   (i) distributive lattice

   (ii) Boolean lattice

   (iii) Trivial lattice

   (iv) Bounded lattice

   (e) In a distributive lattice, which property is satisfied?

   (i) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

   (ii) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

   (iii) Both *(i)* and *(ii)*

   (iv) None of the above

   (f) If a poset has both the least element and the greatest element, then the poset is

   (i) totally ordered

   (ii) bounded

   (iii) reflexive

   (iv) symmetric

(g) A subset of a poset in which every two elements are comparable is called a

(i) chain

(ii) antichain

(iii) subgraph

(iv) partial order

(h) Which is of the following properties not required for a relation to be partial order ?

(i) reflexive

(ii) antisymmetric

(iii) transitive

(iv) symmetry

(i) Which of the following is not a law of lattices ?

(i) associative law

(ii) commutative law

(iii) idempotent law

(iv) complement law

(j) Which operation is not part of Boolean algebra ?

(i) AND

(ii) OR

(iii) NOT

(iv) SUBTRACTION

2. Answer the following questions : 2×5=10

(a) Simplify the expression :

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$$

(b) State and prove one of the idempotent laws of lattices.

(c) What is the greatest element in a poset ? Give an example.

(d) Write the complement of the expression $f = abc' + ab' + b'c'$

(e) Prove that in a Boolean algebra complements of 0 and 1 are 1 and 0 respectively.

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

(a) Prove that the elements 0 and 1 of Boolean algebra are unique.

(b) Prove that for a bounded distributive lattice, the complement is unique, if exists.

(c) Prove that every finite lattice is bounded.

(d) Simplify Boolean expression. $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$

(e) Construct Hasse diagram for the divisibility relation on the set $\{1, 2, 3, 6, 12\}$.

(f) State and prove the absorption laws in Boolean algebra.

4. Answer ***any four*** of the following questions : 10×4=40

(a) (i) Let a, b, c be elements in a lattice $(L, \leq)$. Show that if $a \leq b$, then $a \vee (b \wedge c) \leq b \wedge (a \vee c)$

(ii) Prove that product of two lattices is also a lattice. 5+5=10

(b) Let L be a complemented and distributive lattice. Then prove that for any $a, b, c \in L$

(i) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

(ii) $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ 5+5=10

(c) Express the Boolean expressions as sum-of-product and then in its complete sum-of-product form :

(i) $z(x' + y) + y'$

(ii) $(x' + y)' + x'y$ 5+5=10

(d) (i) Prove that the set N of natural numbers under divisibility forms a poset.

(ii) State and prove the idempotent law in a Boolean algebra. 5+5=10

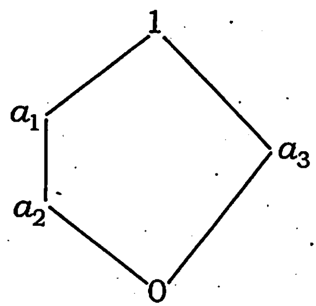
(e) Prove that n variable Boolean function having products of all maxterms is zero.

(f) (i) Define a complete lattice with an illustrated example. Is $(Z, \leq)$ a complete lattice ?

(ii) Define modular lattice. Prove that every distributive lattice is modular but the converse is not true. 5+5=10

(g) (i) State and prove De Morgan's law in Boolean algebra.

(ii) Show that lattice L given below is not modular : 5+5=10



(h) (i) Show with an example that the union of two sublattices may not be a sublattice.

(ii) Prove that a poset $(L, \leq)$ is a lattice if and only if every non-empty finite subset of L has *glb* and *lub*. 5+5=10