# 2019

# MATHEMATICS

## ( General )

Paper : 6.1

**( Linear Algebra and Complex Analysis )**

*Full Marks* : 80

*Time* : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

*Answer* either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

*(a)* Is set {(1, 0), (1, 1)} a basis for $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$?

{(1, 0), (1, 1)} সংহতিটো $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$-ৰ এটা ভূমি হয়নে ?

*(b)* Write the rank of the unit matrix

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

একক মৌলকক্ষ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$-ৰ কোটি লিখা।

(c) $U$ is a subspace of the vector space $V(F)$ and $a \in F$. Is $aU = U$?
$V(F)$ সদিশ স্থানৰ $U$ এখন উপস্থান আৰু $a \in F$. তেন্তে $aU = U$ হয়নে?

(d) Mention Cauchy-Riemann equations.
ক'ছি-ৰিমানৰ সমীকৰণসমূহ উল্লেখ কৰা।

(e) Give an example of a finite vector space.
এখন সসীম সদিশ স্থানৰ উদাহৰণ দিয়া।

(f) Define analytic function.
বৈশ্লেষিক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) Can an elementary transformation change the rank of a matrix?
প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰণ এটাই মৌলকক্ষৰ কোটি পৰিবৰ্তন কৰিব পাৰেনে?

(h) Which of the following functions is a linear transformation from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$?
নিম্নোক্ত কোনটো ফলন $\mathbb{R}^2$-ৰ পৰা $\mathbb{R}^2$-লৈ এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰ?

(i) $\mathscr{T}(x, y) = (x - y, x + y)$

(ii) $\mathscr{T}(x, y) = (x + 1, y - 1)$

(iii) $\mathscr{T}(x, y) = (x^2, y^2)$

(i) Write the normal form of the matrix $\mathscr{A}$, where
$\mathscr{A}$ মৌলকক্ষৰ প্ৰসামান্য ৰূপটো লিখা, য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



( Continued )



(j) Is the set $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ linearly independent subset of vector space $V_3(\mathbb{R})$?
$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ সংহতিটো $V_3(\mathbb{R})$ সদিশ স্থানৰ এটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ উপসংহতি হয়নে?

**2.** Answer any *two* of the following questions : 2×2=4

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If two vectors in a vector space are linearly dependent, then show that one vector is a scalar multiple of the other.
যদি এখন সদিশ স্থানৰ দুটা মৌল ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে সিহঁতৰ এটা আনটোৰ স্কেলাৰ গুণফল।

(b) Prove that $U = \{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ is a linear subspace of $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.
প্ৰমাণ কৰা যে $U = \{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ সংহতিটো $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$-ৰ এটা ৰৈখিক উপস্থান।

(c) If $T : U(F) \to V(F)$ is a linear mapping, then show that $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in U$.
যদি $T : U(F) \to V(F)$ এটা ৰৈখিক ফলন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in U$.

**3.** Answer any *three* of the following questions : 2×3=6

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that $u = e^x \cos y$ is a harmonic function.
দেখুওৱা যে, $u = e^x \cos y$ এটা হৰাত্মক ফলন।



( Turn Over )

(b) If $f(z) = \dfrac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}$, $z \neq 0$, $f(0)=0$, then prove that

$$\underset{z\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(z)-f(0)}{z} = 0$$

where $z \to 0$ along any radius vector.

যদি $f(z) = \dfrac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}$, $z \neq 0$, $f(0)=0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\underset{z\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(z)-f(0)}{z} = 0$$

য'ত যি কোনো সদিশ ব্যাসাৰ্ধই দি $z \to 0$ হয়।

(c) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{d}{dz}(\log_e z) = \frac{1}{z}$$

(d) If $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, then prove that

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

**4.** Answer any *four* of the following questions : 5×4=

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Prove that a non-empty subset $W$ of a vector space $V(F)$ is a subspace, if

$$a, b \in F, u, v \in W \Rightarrow au + bv \in W$$



( Continued



প্ৰমাণ কৰা যে $V(F)$ সদিশ স্থানৰ এটা অশূন্য উপসংহতি $W$ এখন উপস্থান হ'ব, যদি

$$a, b \in F, u, v \in W \Rightarrow au + bv \in W$$

(b) Show that the vectors (1, 1, 0, 0), (0, 1, −1, 0) and (0, 0, 0, 3) in $\mathbb{R}^4$ are linearly independent.

দেখুওৱা যে $\mathbb{R}^4$-ৰ (1, 1, 0, 0), (0, 1, −1, 0) আৰু (0, 0, 0, 3) ভেক্টৰকেইটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(c) Prove that any superset of a linearly dependent set is linearly dependent.

প্ৰমাণ কৰা যে ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ সংহতিৰ যি কোনো অধিসংহতি ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

(d) If $S$ and $T$ are subsets of a vector space $V(F)$, then show that

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

যদি $S$ আৰু $T$ সংহতি দুটা এখন সদিশ স্থান $V(F)$-ৰ উপসংহতি হয়, তেন্তে

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

(e) Prove that $W_1 \cap W_2$ is a subspace of $V(F)$, if $W_1$ and $W_2$ are subspaces of $V(F)$.

যদি $W_1$ আৰু $W_2$ সংহতি দুটা $V(F)$ সদিশ স্থানৰ উপস্থান হয়, তেন্তে $W_1 \cap W_2$ ও $V(F)$-ৰ এটা উপস্থান হ'ব বুলি প্ৰমাণ কৰা।

( Turn Over )

(f) Show that the function $f : V_3(F) \to V_2(F)$ defined by $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$ is a linear transformation.

প্ৰমাণ কৰা যে $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$-ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ $f : V_3(F) \to V_2(F)$ ফলনটো এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰণ।

**5.** Answer any *two* of the following questions : 5×2=

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Prove that $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is continuous at $z_0 = x_0 + iy_0$, iff $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are continuous at $(x_0, y_0)$.

প্ৰমাণ কৰা যে $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ফলনটো $z_0 = x_0 + iy_0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, যদি আৰু যদিহে $(x_0, y_0)$ বিন্দুত $u(x, y)$ আৰু $v(x, y)$ ফলন দুটা অবিচ্ছিন্ন।

(b) Using Cauchy's integral formula, evaluate $\oint_C \frac{z^3}{z-2i} dz$, where $C$ is the circle $|z-2| = 5$.

$C$-য়ে $|z-2| = 5$ বৃত্তটোক বুজালে ক'ছিৰ সমাকলন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি $\oint_C \frac{z^3}{z-2i} dz$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) State and prove Cauchy's integral formula.

ক'ছিৰ সমাকলন সূত্ৰটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

( Continu



**6.** Verify Cayley-Hamilton theorem for the following matrix $A$ and hence find $A^{-1}$ : 10

নিম্নোক্ত মৌলকক্ষ $A$-ৰ বাবে কেলি-হেমিল্টন উপপাদ্যটো প্ৰতিপন্ন কৰা আৰু তাৰপৰ $A^{-1}$ নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Or / অথবা*

Find all eigenvalues and eigenvectors of the matrix $A$, where

$A$ মৌলকক্ষৰ সকলোবোৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ উলিওৱা, য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**7.** State various elementary transformations of a matrix. Reduce the following matrix $A$ to normal form and hence find its rank : 3+6+1=10

মৌলকক্ষৰ বিভিন্ন প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰসমূহ লিখা। তলৰ $A$ মৌলকক্ষটো প্ৰসামান্য আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা আৰু তাৰ পৰা ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$



( Turn Over )

*Or* / অথবা

What is meant by echelon form of a matrix? Reduce the following matrix to echelon form and hence find its rank :

মৌলকক্ষৰ ইকেলন আকাৰ বুলিলে কি বুজায়? তলৰ মৌলকক্ষটো ইকেলন আকাৰত প্ৰকাশ কৰা আৰু তাৰ পৰা কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

**8.** Prove that $\oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 2\pi i$, where $C$ is the circle $|z| = 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 2\pi i$, য'ত $C$ হৈছে $|z| = 1$ বৃত্ত।

*Or* / অথবা

Find the analytic function whose real part is

$$u = e^{-x}[(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y]$$

Also show that $u$ is harmonic.

$$u = e^{-x}[(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y]$$

বাস্তৱ অংশবিশিষ্ট বৈশ্লেষিক ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা। লগতে দেখুওৱা যে $u$ এটা হৰাত্মক ফলন।

★★★

# 2019

## MATHEMATICS

## ( General )

Paper : 6.2

## ( Advanced Calculus )

*Full Marks* : 80

*Time* : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

*Answer* either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following as directed : 1×10=10

তলত দিয়াবোৰৰ নিৰ্দেশানুযায়ী উত্তৰ দিয়া :

(a) If $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, find the set of limit points of $A$ (w.r. to usual metric).

যদি $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, $A$-ৰ সীমাবিন্দুৰ সংহতিটো নিৰ্ণয় কৰা (সাধাৰণ দূৰিক সাপেক্ষে)।

(b) Write the value of $\Gamma(n)$, where $n$ is a natural number.

$\Gamma(n)$-ৰ মান লিখা য'ত $n$ এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।



*( Turn Over )*

*(c)* State Bolzano-Weierstrass theorem.

Bolzano-Weierstrass-ৰ উপপাদ্যটো লিখা।

*(d)* Is the set of real numbers w.r. to usual metric complete?

সাধাৰণ দূৰিক সাপেক্ষে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা পূৰ্ণ দূৰিক স্থান হয়নে?

*(e)* Every continuous function is Riemann integrable.

( Write True or False )

প্ৰতিটো অবিচ্ছিন্ন ফলন Riemann অনুকলনীয়।

( সঁচা নে মিছা লিখা )

*(f)* Express beta function $B(l, m)$ mathematically.

বিটা ফলন $B(l, m)$-ক গাণিতিকভাৱে প্ৰকাশ কৰা।

*(g)* Give an example of an improper integral of first kind.

এটা প্ৰথম প্ৰকাৰৰ অপ্ৰকৃত অনুকলনৰ উদাহৰণ দিয়া।

*(h)* Define open set.

মুক্ত সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা।

*(i)* Write definition of Cauchy sequence.

কশ্চি অণুক্ৰমৰ সংজ্ঞা লিখা।

*(j)* When an integral is said to be improper?

এটা অনুকলনক কেতিয়া অপ্ৰকৃত বুলি কোৱা হ'ব?





**2.** Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

*(a)* Let $d : R \times R \to R$ be defined by $d(x, y) = |x - y|$. Show that $d$ is a metric on $R$, $x, y \in R$.

ধৰা হল $d : R \times R \to R$ ফলনটোৰ সংজ্ঞা এনেধৰণে দিয়া আছে $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in R$. দেখুওৱা যে $d$, $R$-ত এটা দূৰিক।

*(b)* Evaluate upper Riemann sum for the function $f(x) = C$, where $C$ is a constant.

$f(x) = C$ ফলনটোৰ উৰ্ধ ৰাইমান যোগফল উলিওৱা য'ত $C$ এটা ধ্ৰুৱক।

*(c)* Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y)\, dxdy$$

*(d)* Show that (দেখুওৱা যে)

$$\Gamma(n) = (n-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-2}\, dx$$

*(e)* Show that $X$ is an open set, where $(X, d)$ is a metric space.

দেখুওৱা যে $(X, d)$ দূৰিক স্থানত $X$ এটা মুক্ত সংহতি।

**3.** Solve any *four* of the following : 5×4=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ সমাধান কৰা :

*(a)* Give an example of an incomplete metric spae with justification.

যুক্তি সহকাৰে এটা অপূৰ্ণ দূৰিক স্থানৰ উদাহৰণ দিয়া।

*(b)* In a metric space, show that every open sphere is an open set.

এটা দূৰিক স্থানত, দেখুওৱা যে, প্ৰত্যেক মুক্ত গোলক এটা মুক্ত সংহতি।

*(c)* Examine the convergence of the following integral :

তলৰ অনুকলনটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1-x)^{1/3}}$$

*(d)* Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,dx \le \int_a^{\bar{b}} f\,dx$$

*(e)* Evaluate $\iiint e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$ over the positive octant such that $x+y+z \le 1$.

ধনাত্মক চোকত $\iiint e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'তে $x+y+z \le 1$.





**4.** Solve any *two* of the following : 10×2=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

*(a)* *(i)* Show that in a metric space, every convergent sequence is a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে, এটা দূৰিক স্থানত প্ৰতিটো অভিসাৰী অণুক্ৰম একোটা কচি অণুক্ৰম।

*(ii)* If $f(x) = x^2\ \forall x \in [0, a]$, find $L(p, f)$.

যদি $f(x) = x^2\ \forall x \in [0, a]$, $L(p, f)$ নিৰ্ণয় কৰা।

*(b)* Test convergence for the following integrals :

তলত অনুকলনবোৰৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

*(i)* $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{1+x^2}$

*(ii)* $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

*(c)* *(i)* If $f \in R[a, b]$, show that $f^2 \in R[a, b]$.

যদি $f \in R[a, b]$, দেখুওৱা যে $f^2 \in R[a, b]$.

*(ii)* Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right] dx$$

5. Solve any *two* of the following : 10×2=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(a) (i) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1),\ m > 0,\ n > 0$$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$B(l, m) = \int_0^\infty \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}}\,dx$$

(b) (i) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$$

converges (অভিসাৰী).

(ii) Let $f$ be a continuous function defined on $[a, b]$ and $f \in R[a, b]$. Prove that for some $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

ধৰা হল $[a, b]$ অন্তবালত $f$ এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু $f \in R[a, b]$. কোনো এটা বিন্দু $c \in [a, b]$-ৰ বাবে দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$





(c) (i) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা)

$$\iiint_R (x+y+z+1)^2\,dx\,dy\,dz$$

where $R$ is the region bounded by $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1$.

য'ত $R$, ক্ষেত্ৰ $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1$-ৰ দ্বাৰা সীমিত।

(ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\iiint_R (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \frac{9}{2}$$

where (য'ত)

$$R : 0 \leq x \leq 1;\ 1 \leq y \leq 2;\ 2 \leq z \leq 3$$

★★★