2016

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Is the following statement true for any complex number z?

z যি কোনো এটা জটিল সংখ্যাৰ বাবে তলৰ উক্তিটো সত্যনে ?

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{Re } z| + |\text{Im } z|)$$

(b) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + r = 0$, then $\Sigma\alpha\beta = ?$

$x^3 + px^2 + r = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β, γ হ'লে, $\Sigma\alpha\beta = ?$

(c) Is it true that

$$\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{amp} z_1 + \operatorname{amp} z_2$$

for any two complex numbers z_1 and z_2?

z_1 আৰু z_2 যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যা হ'লে

$$\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{amp} z_1 + \operatorname{amp} z_2$$

উক্তিটো সত্যনে?

(d) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}^n$$

(e) Is the following series convergent?

তলত দিয়া শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়নে?

$$2-2+2-2+2-\cdots$$

(f) State Gregory's series completely.

গ্ৰেগ'ৰিৰ শ্ৰেণী সম্পূৰ্ণকৈ লিখা।

(g) Write down the relation among AM, GM and HM.

AM, GM আৰু HM ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

PART—II

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) For any two complex numbers z_1 and z_2, prove that

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$$

z_1 আৰু z_2 যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যাৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$$

(b) Examine if the sequence

$$\{u_n\} = \left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\}$$

is monotonic increasing.

$\{u_n\} = \left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান হয়নে নহয়, পৰীক্ষা কৰা।

(c) Find the minimum value of $x+y+z$, where x, y, z assume positive values subject to the condition $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$.

x, y, z ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$ হ'লে $x+y+z$ৰ লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, find the value of $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$.

$x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β আৰু γ হ'লে, $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ৰ মান উলিওৱা।

PART—III

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If α and β are the roots of the equation $x^2-2x\cos\theta+1=0$, then show that the equation whose roots are α^n and β^n is $x^2-2x\cos n\theta+1=0$.

$x^2-2x\cos\theta+1=0$ সমীকৰণৰ মূল দুটা α আৰু β হ'লে, দেখুওৱা যে α^n আৰু β^n মূল হোৱা সমীকৰণটো হ'ব $x^2-2x\cos n\theta+1=0$.

(b) Prove that the roots of the equation

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=x$$

are all real.

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=x$$

সমীকৰণৰ আটাইবোৰ মূল বাস্তৱ হ'ব।

(c) If a, b, c are all positive and $a+b+c=1$, then prove that

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{9}{2}$$

যদি a, b, c তিনিটা ধনাত্মক সংখ্যা আৰু $a+b+c=1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{9}{2}$$

(d) Examine the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^4}{7}+\cdots\ (x>0)$$

(e) State Cauchy's general principle of convergence. Use the principle to prove that the sequence $\{u_n\}$, where

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

is not convergent.

কচিৰ অনুক্ৰম অভিসাৰিতাৰ সাধাৰণ সূত্ৰ লিখা। সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে অনুক্ৰম $\{u_n\}$, য'ত

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

অভিসাৰী নহয়।

PART—IV

4. Answer *either* (a) *or* (b) :
(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* If (যদি) $\sin(\theta + i\phi) = \tan(x + iy)$, show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\tan\theta}{\tanh\phi} = \frac{\sin 2x}{\sinh 2y}$$ 5

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\log\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right) = -2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Hence deduce that (ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে)

$$\tan\left\{i\log\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right\} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$ 3+2=5

(b) *(i)* If (যদি) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\log(\sec\theta) = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \frac{1}{4}\tan^4\theta + \frac{1}{6}\tan^6\theta - \cdots$$ 5

(ii) If (যদি) $\sin\theta = x\cos(\theta + \alpha)$, show that (দেখুওৱা যে)

$$\theta = x\cos\alpha - \frac{x^2}{2}\sin 2\alpha - \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{x^4}{4}\sin 4\alpha + \cdots$$ 5

5. Answer *either* (a) *or* (b) :
(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* Solve by Cardan's method : 5
কাৰ্ডন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$$x^3 + 6x + 7 = 0$$

(ii) Examine the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, where

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{n}$$ 5

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা বিচাৰ কৰা, য'ত

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{n}$$

(b) *(i)* Define bounded sequence. Prove that a convergent sequence is bounded. 1+4=5
পৰিবদ্ধ অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা লিখা। প্ৰমাণ কৰা যে এটা অভিসাৰী অনুক্ৰম পৰিবদ্ধ।

(ii) If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ be the roots of the equation

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_n = 0 \quad (p_n \neq 0)$$

show that

$$\sum \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{p_n}(p_1 p_n - 1) - n$$ 5

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n = 0 \quad (p_n \neq 0)$$

সমীকৰণৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ হ'লে, দেখুওৱা যে

$$\sum \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{p_n}(p_1 p_n - 1) - n$$

6. Answer *either (a) or (b)* :

(a) অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* Prove that the following sequence converges to a limit lying between 2 and 3 : 6

তলত দিয়া অনুক্ৰমটো 2 আৰু 3ৰ মাজৰ সংখ্যা এটালৈ অভিসৰণ কৰে বুলি প্ৰমাণ কৰা :

$$\{u_n\}, \text{ where (য'ত) } u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(ii) If x, y, z are positive and $x+y+z=1$, then prove that

$$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$$ 4

যদি x, y, z ধনাত্মক আৰু $x+y+z=1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$$

(b) *(i)* State Leibnitz's test for alternating series. Prove that the series

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\infty$$

is a conditionally convergent series. 1+4=5

লিব্‌নিজৰ একান্তৰ শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষাটোৰ উক্তি লিখা। প্ৰমাণ কৰা যে

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\infty$$

শ্ৰেণীটো চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী।

(ii) If x, y, z be positive rational numbers, then prove that

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} \geq x^x y^y z^z \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$$ 5

যদি x, y, z ধনাত্মক পৰিমেয় সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} \geq x^x y^y z^z \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$$

★★★